КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ДВУЯЗЫЧНОЙ (ТАТАРСКО-РУССКОЙ) ОСНОВЕ (ЧАСТЬ 2)

учебное пособие

ИКЕТЕЛЛЕ (ТАТАРЧА-РУСЧА) НИГЕЗДӘ ПЕДАГОГИКА ЮНӘЛЕШЕ БУЕНЧА УКУЧЫ СТУДЕНТЛАР ӨЧЕН МАТЕМАТИКА (2-нче ӨЛЕШ)

уку ярдәмлеге

КАЗАНЬ

2024

УДК

ББК

Авторы-составители:

А.Ф. Галимянов, Б.Э. Хакимов, Н.И. Батрова

Компьютерная вёрстка: …

Рецензенты:

Тимергалиев С.Н. — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Института транспортных сооружений ФГБОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет»

Төзүче-авторлар:

Ә.Ф. Галимҗанов, Б.Э. Хакимов, Н.И. Батрова

Компьютерда текстларны һәм битләрне төзү: …

Математика (часть 2) для студентов педагогического направления на двуязычной (татарско-русской) основе: учебное пособие. — Казань, Казанский федеральный университет, 2024 – 124 с.

ISBN

УДК

ББК

ЭЧТӘЛЕК

КЕРЕШ

Илебездә мәгърифәтне фундаменталь фән һәм гуманитар мәдәният берлеге итеп карыйлар. Фундаменталь фән белгечнең әзерлек дәрәҗәсе дип каралса, гуманитар мәдәният кешенең эчке рухи байлыгын күрсәтә. Мәгърифәт проблемаларын анализлап, академик А.Н. Крылов болай дигән: “Мәктәп тулы, тәмам белем бирә алмый, мәктәпнең төп бурычы – гомум үсеш бирү., кирәкле күнекмәләрне булдыру, аерым әйткәндә, мәктәпнең төп бурычы – укырга, танып белергә өйрәтү. Кем дә кем мәктәптә укырга, өйрәнергә өйрәнгән икән, гомер буена аның практик эшчәнлеге иң яхшы мәктәп булачак.”

Безнең мәктәпнең үзенчәлеге тирән эчтәлекле анык фикерләү белән бергә материалны гади, конкрет, аңларлык итеп бирүдә. Бу идеяләрне тормышка ашыру югары квалификацияле, иҗади уйлый белә торган укытучылар булганын күздә тота.

Математик мәгариф һәм математик культура фәнни белем үзәге булып тора һәм математика кыйммәте, фундаменталь тикшеренүләр нигезе буларак, арта.

Бу мәсьәләләрне чишү өчен тикшеренүләрнең заманча халәтен һәм фәннең бу өлкәсенең дөньяны танып-белү принципларын чагылдырган дәреслекләр кирәк.

Безнең бу кыска гына укыту ярдәмлегендә без бу принципларны сакларга тырыштык. Математик анализ курсы программада зур урын алып тормый, шуңа күрә бу ярдәмлекҗә барлык исбатлаулар да китерелми. Ләкмн бу ярдәмлек буенча төп төшенчәләрне үзләштерергә, математик анализның монда күрсәтелгән бүлекләре буенча мәсьәләләр чишәргә өйрәнергә мөмкин.

Математик анализ предметын тәкъдир итү курс эчтәлеген аудитория аның төп элементларын үзләштерә алырлык итеп күрсәтүне күздз тота. Күп нәрсә биредә курс материалы күрсәтелгән формага бәйле, чөнки тоюдан күрсәтелешкә, күрсәтелештән төшенчәләргә, төшенчәләрдән фикерләүләргә, фикерләүләрдән йомгаклауларга китерүче тәкъдир итү күп мәртәбәләр кызыклырак булачак.

Бу уку әсбабы нигезенә математик анализны күп еллар татарча укыту тәҗрибәсе салынды, ул уку планына карап, бер яки ике семестр дәвамында укыла. Бу вакытта әсбап һәм лекцияләр арасында аерма барлыгын да искәртү зарур. Лекцияләрдә теге яки бу материал күбрәк я кымкарак китерелергә мөмкин.

Математик анализга кереш бүлегендә курсны үзләштерү өчен кирәкле кереш материал бирелә. Башка предметларга чагыштырма бәйсез булу өчен алгебра һәм геометриядән дә кыскача мәгълүмат китерелә.

1. МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КЕРЕШ

1.1. Күплекләр

Билгеләмә. Күплек – ниндидер объектлар җыелмасы.Күплекне төзүче объектлар элементлар дип атала.

$a \in A$ дип язу a ның A күплеге элементы икәнен белдерә.

$b \notin A$ дип язу b ның A күплеге элементы түгеллеген аңлата.

$\varnothing$ - буш күплек

$B \subset A$ дип язу B күплегенең A күплегенең аскүплеге икәнен аңлата, ягъни B күплеге A күплеге A элементларының бер өлешеннән тора

$B = A$ күплекләрнең тигез икәнен, ягъни бер үк элементлардан торганын белдерә

A һәм B күплекләренең берләшмәсе дип бу күплекләрнең берсенә булса да кергән элементлардан торган C күплеге атала, ягъни

$C = A \cup B$

A һәм B күплекләренең кисешүе дип бу күплекләрнең икесенә дә кергән элементлардан торган D күплеге атала, ягъни $D = A \cap B$.

A һәм B күплекләренең аермасы дип A күплегенә кергән, ләкин B күплегенә кермәгән элементлардан торган Eкүплеге атала, ягъни $E = \mathrm{A} \backslash \mathrm{B}$.

Мәктәп курсыннан билгеле булганча, R – реаль саннар, Q - рациональ, J - иррациональ, Z - бөтен, N – натураль саннар күплеге

Кванторлар

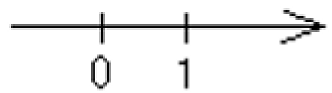
Без биредә артык тирәнгә кермичә генә ике квантор – гомумилек кванторы һәм барлык кванторларын карап китәрбез. Алар математик расламаларны кыска һәм төгәл язу өчен бик уңайлы.

Кванторлаорның беренчесе – гомумилек кванторы. Ул $\forall$ тамгасы белән күрсәтелә. Инглизчә “барысы өчен” сүзенең беренче хәрефенең борылганы. А- раслама, x – үзгәрешле булсын. Әгәр дә теләсә нинди мөмкин x объекты өчен А расламасы дөрес икән, $\forall x A$ дип язалар.

Әгәр дә А шартын канәгатьләндерүче x объекты бар икән, ул вакытта $\exists xA$ дип языла. Арырак, бу кванторларны конкрет кулланганда, аларның мәгънәләре ачылыр. Кванторлар

1.2. Реаль саннар

Геометрик яктан реаль саннар күплеге R саннар турысы (санлы күчәр) нокталары белән бирелә. Анда хисап башы, уңай юнәлеш һәм масштаб берәмлеге бирелә (рәс.1.1).



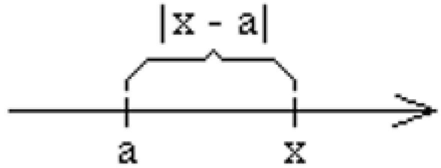
Рәс.1.1

Реаль саннар күплеге һәм саннар турысы нокталары арасында бердәй тиңдәшлек бар: «x саны» «x ноктасы»на тиңдәш.

$a \leq x \leq b$ булса, X күплеге $[a, b]$ кисемтәсе (сегменты) дип, $a < x < b$ булса (a,b) интервалы дип, $a \leq x < b,\ a < x \leq b$ булса [a,b) һәм (a,b] ярыминтерваллары дип атала. Чиксез интерваллар һәм ярыминтерваллар (-∞,a),(b,+∞),(-∞,+∞),(-∞,a],[b,+∞) да була. Кисемтәләр (сегментлар), интерваллар һәм ярыминтервалларны X аралыгы термины белән берләштереп була.

Билгеләмә. x реаль санының абсолют зурлыгы (модуле) дип әгәр x тискәре булмаса x үзе, x тискәре булса аңа капма-каршы –x саны атала (рәс.1.2).

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{әгәр } x \geq 0 \\ -x, & \text{әгәр } x < 0 \end{cases}$$



Рәс.1.2

Бер үк кыйммәтне саклаучы зурлык даими зурлык – константа дип атала. Әгәр зурлык даими кыйммәтне бирелгән процесс кысаларында гына сакласа, ул параметр була. Төрле санлы кыйммәтләр алырга мөмкин булган зурлык үзгәрмә зурлык – үзгәрешле була. Мәсәлән, тигез хәрәкәт вакытында $s = vt$, биредә s - юл, t - вакыт, v - параметр.

A санлы күплеге бирелгән булсын. Әгәр дә $\forall x \in A\ x \leq M$ шарты үтәлсә M саны A күплегенең өске чиге дип атала. Әгәр A күплегенең өске чиге бар икән, A өстән чикләнгән дип атала.

A күплеге өстән чикләнгән булсын. Өске чикләрнең иң кечкенәсе өске кыр дип атала һәм $sup\, A$ дип билгеләнә.

Төгәл кыр турында теорема: Әгәр A күплеге буш түгел һәм өстән чикләнгән икән, аның төгәл өске кыры бар.

A буш түгел һәм өстән чикләнгән, ә B – саннар күплеге A күплеген өстән чикләүче барлык саннар күплеге булсын. Әгәр $a \in A$ һәм $b \in B$ икән, күплекне өстән чикләүче сан билгеләмәсеннән $a \leq b$ икәне чыга. Димәк, барлык a һәм b өчен $a \leq \beta \leq b$ тигезсезлеге үтәлерлек β саны бар. $a \leq \beta, a \in A$ тигезсезлеге β саны A күплеген өстән чикләвен аңлата, ә $\beta \leq b,\ b \in B$ - β саны A күплеген өстән чикләүчеләр арасында иң кечкенәсе икәнен белдерә. димәк, $\beta = sup\, A$.

Аналогия буенча иң зур аскы кыр кертелә. $\gamma = \inf A$.

Абсолют зурлыклар үзлекләре: теләсә нинди a һәм b өчен мондый тигезсезлекләр үтәлә: $|a + b| \leq |a| + |b|$, $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$.

1.3. Функцияләр

Билгеләмә. Әгәр X күплегенең һәр x элементына $(x \in X)$ Y күплегенең билгеле бер y элементы тиңдәш куелса $(y \in Y)$, X күплегендә $y = f(x)$ функциясе бирелгән диләр.

Бу вакытта x бәйсез үзгәрешле (яки аргумент), y – бәйле үзгәрешле, ә f – тиңдәшлек законы була.

X күплеге функциянең билгеләнү өлкәсе, ә Y күплеге функция кыйммәтләре өлкәсе була. Әгәр махсус әйтелмәсә, функциянең билгеләнү өлкәсе дип x бәйсез үзгәрешлесенең барлык мөмкин кыйммәтләре күплеге, ягъни $y = f(x)$ функциясенең мәгънәсе булган кыйммәтләре күплеге атала.

Функция билгеләү ысуллары

а) аналитик ысул, функция $y = f(x)$ рәвешле формула белән бирелә. Мәсәлән, $y = x^4 + x^2 + 1$ функциясе аналитик ысул белән бирелгән. Ләкин функция аның аналитик аңлатмасына тәңгәл ук булмаска да мөмкин. Мәсәлән,

$\begin{cases} x^2, & \text{әгәр } x < 0 \\ x + 3, & \text{әгәр } x \geq 0 \end{cases}$. Монда ике аналитик аңлатма бар.

б) таблица ысулы. Функция x аргументлары кыйммәтләрен һәм аңа тиңдәшле $f(x)$ функциясе кыйммәтләрен үз эченә алган таблица белән бирелергә мөмкин.

в) график ысул функция графигын сурәтләүдән гыйбарәт. График яссылыкның (x, y) нокталары күплегеннән тора; биредә абсциссалар x аргументы кыйммәтләре, ә ординаталар – аларга тиңдәш $y = f(x)$ функциясе кыйммәтләре.

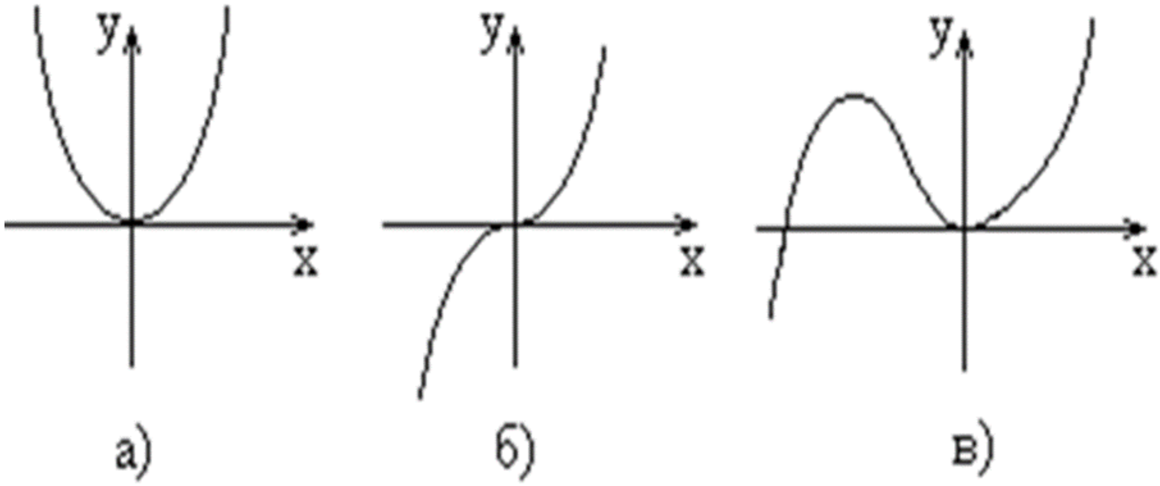
1.4. Функцияләрнең төп үзлекләре

1) Җөплек һәм таклык. Әгәр дә билгеләнү өлкәсендәге теләсә кайсы x кыйммәте өчен $f(-x) = f(x)$ булса $y = f(x)$ функөиясе җөп, әгәр $f(-x) = -f(x)$ булса, так дип атала. Җөп тә, так та түгел функцияләрне кайбер очракта гомуми рәвештәге функция дип йөртәләр (рәс.1.3).

а) $y = x^2$ - җөп функция

б) $y = x^3$ - так функция

в) $y = x^2 + x^3$ - гомуми рәвештәге функция

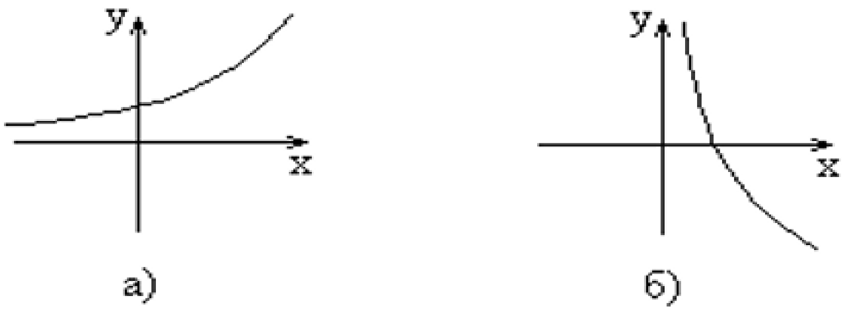


Рәс.1.3

2) Монотонлык. Әгәр X аралыгындагы аргументның зуррак кыйммәтенә функциянең зуррак (кечерәк) кыйммәте туры килсә, $y = f(x)$ функциясе X аралыгында үсүче (кимүче) функция дип атала (рәс.1.4).

а) $y = e^x$ функциясе $(-\infty; \infty)$ интервалында монотон үсә

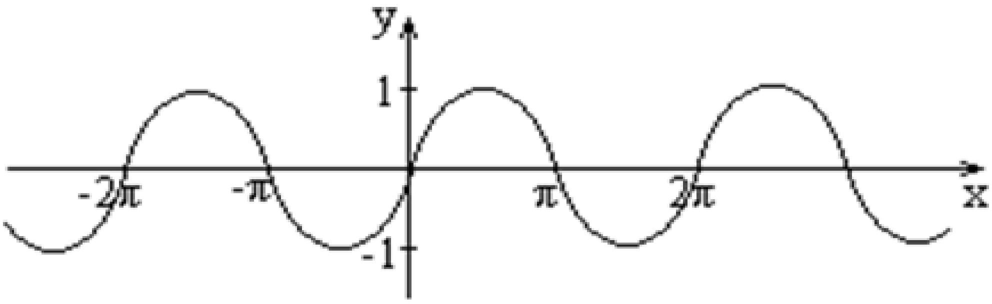
б) $y = log_{1/3}$ x функциясе $(0; +\infty)$ интервалында монотон кими



Рәс.1.4

3) *Чикләнгәнлек*. Әгәр теләсә кайсы $x \in X$ өчен $|f(x)| \leq M$ булырлык $M > 0$ бар икән, $y = f(x)$ функциясе X аралыгында чикләнгән дип атала. 4) *Периодиклык*. Әгәр билгеләнү өлкәсеннән булган һәр x өчен $f(x + T) = f(x)$ икән, $y = f(x)$ функциясе $T \neq 0$ периоды белән периодик дип атала (рәс.1.5).

$y = sin\,x$, период $T = 2\pi$, $sin(x + 2\pi) = sin\,x$



Рәс.1.5

1.5. Төп элементар функцияләр

1) даими y = b. Графигы – абсциссалар күчәренә параллель һәм ординаталар күчәрендә (0; b) ноктасы аша үтүче туры (рәс.1.6 а,б,в).

2) натураль күрсәткечле дәрәҗәле функция.

n җөп булса: *билгеләнү өлкәсе* $(-\infty, +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $[0; +\infty)$.

Монотонлык: $(-\infty, 0]$ тә кими, $(0, +\infty)$ тә үсә.

Җөп

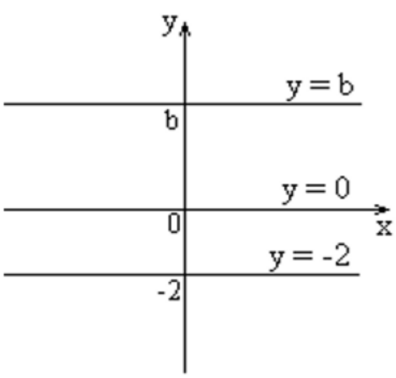
n так булса: *билгеләнү өлкәсе* $(-\infty, +\infty)$

Кыйммәтләр өлкәсе $(-\infty, +\infty)$.

Монотонлык: $(-\infty, +\infty)$ тә үсә.

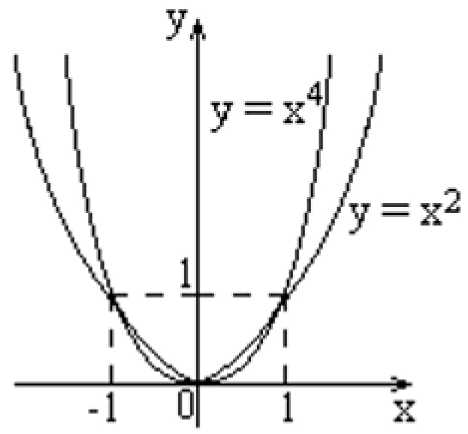
Так

1)

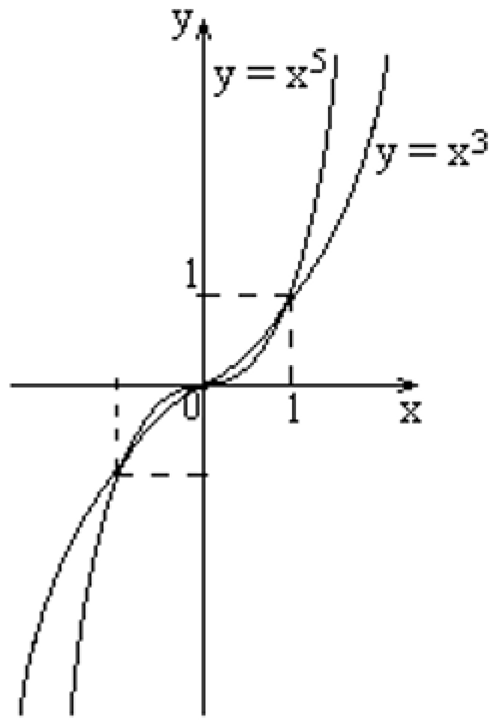


Рәс.1.6 а

2)

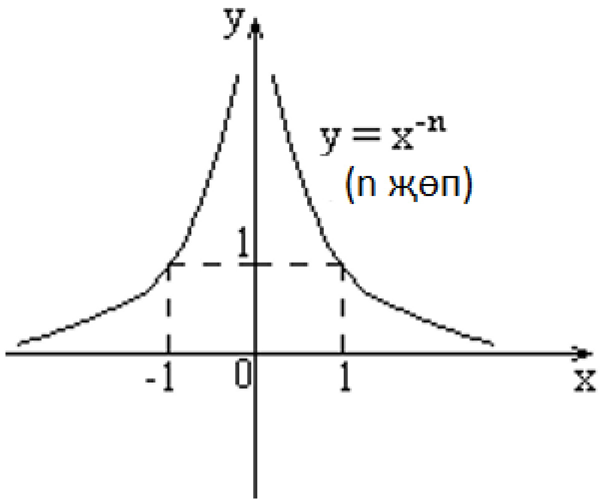


Рәс.1.6 б



Рәс.1.6 в

Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәле функция $\boldsymbol{y = x^{-n}}$ (n – натураль сан) (рәс.1.7).



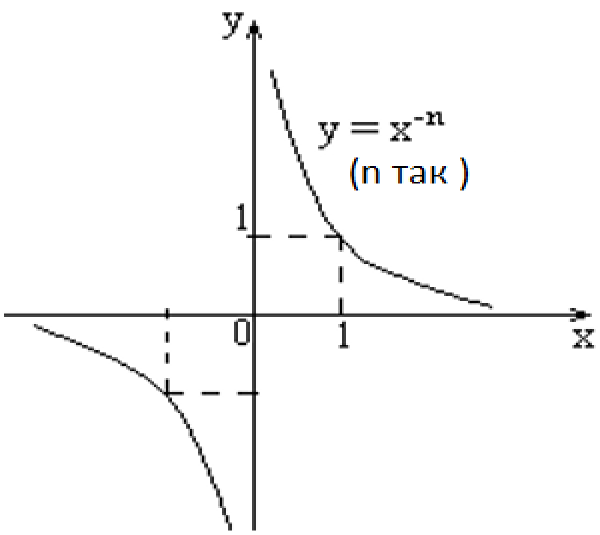
Рәс.1.7

Билгеләнү өлкәсе $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $(0, +\infty)$.

Монотонлык: $(-\infty, 0)$ тә үсә, $(0, +\infty)$ тә кими.

Җөп (рәс.1.8)



Рәс.1.8

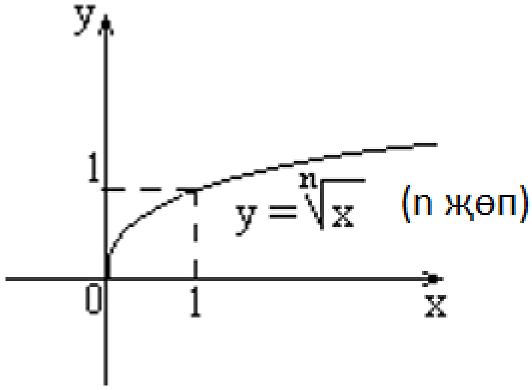
Билгеләнү өлкәсе $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Монотонлык: : $(-\infty, 0)$ һәм $(0, +\infty)$ тә кими.

Так

Күрсәткече уңай һәм бердән кечкенә дәрәҗәле функция$\boldsymbol{y} = \sqrt[n]{x}$ (n – бердән зуррак натураль сан) (рәс.1.9)

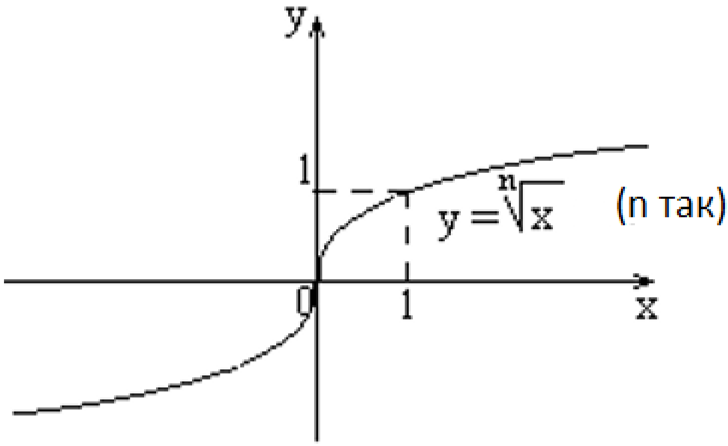


Рәс.1.9

Билгеләнү өлкәсе $[0; +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $[0; +\infty)$.

Монотонлык:$[0; +\infty)$тә үсә (рәс.1.10).



Рәс.1.10

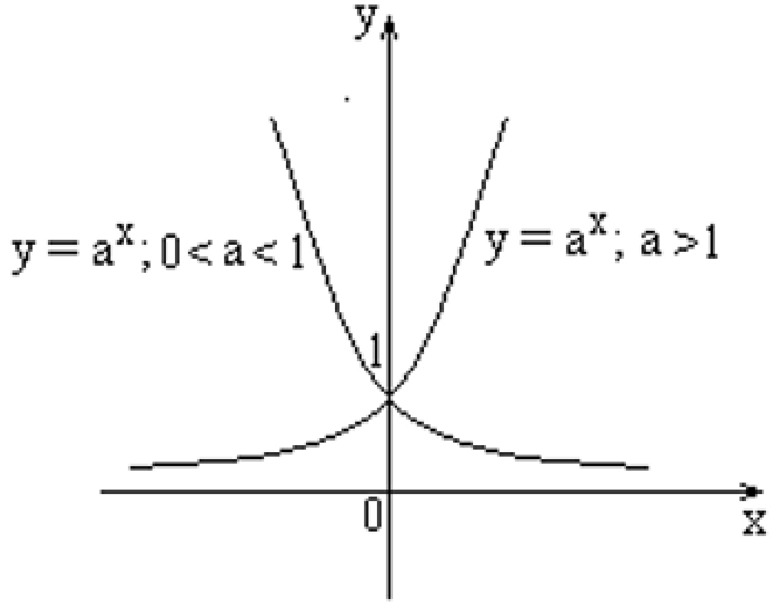
Билгеләнү өлкәсе$(-\infty, +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе$(-\infty, +\infty)$.

Монотонлык: : $(-\infty, +\infty)$тә үсә.

Так

Күрсәткечле функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ (рәс.1.11)



Рәс.1.11

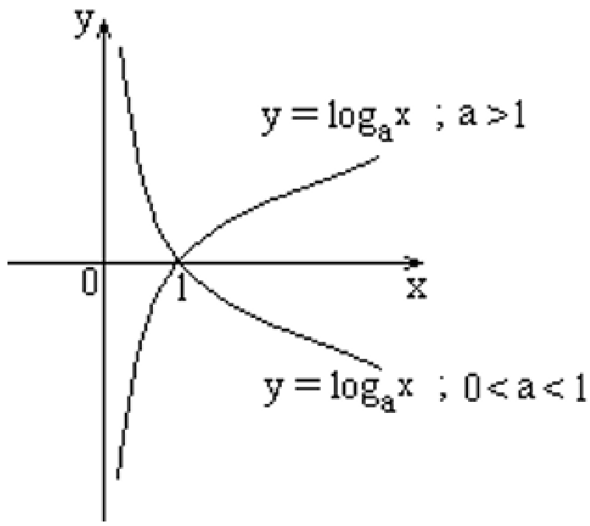
Билгеләнү өлкәсе $(-\infty, +\infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $(0, +\infty)$.

Монотонлык: әгәр $a > 1$ булса, $(-\infty, +\infty)$тә үсә, әгәр $0 < a < 1$ булса, $(-\infty, +\infty)$ тә кими.

Гомуми рәвешле.

Логарифмик функция $\boldsymbol{y = log_a x}$ $(\mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1)$ (рәс.1.12)



Рәс.1.12

Билгеләнү өлкәсе $(0, \infty)$.

Кыйммәтләр өлкәсе $(-\infty, +\infty)$.

Монотонлык: әгәр $a > 1$ булса, $(0, +\infty)$тә үсә, әгәр $0 < a < 1$ булса, $(0, +\infty)$ тә кими.

Гомуми рәвешле.

1.6. Катлаулы функция

Билгеләмә. $y = f(u)$ функциясе u үзгәрешлесеннән f функциясе булсын (U билгеләнү өлкәсе, Y кыйммәтләр өлкәсе), ә u үз чиратында x үзгәрешлесенә бәйле $u = \phi(x)$ функциясе булсын (X билгеләнү өлкәсе, U кыйммәтләр өлкәсе). Ул вакытта X күплегендә бирелгән $y = f[\phi(x)]$ функциясе катлаулы функция (яки функцияләр композициясе, функцияләр суперпозициясе, функциядән функция) була.

Мисал. $y = ln sin\, x$ функциясе 2 функциядән тора: $y = ln\, u\,, u = sin\, x$

1.7. Элементар функция

Билгеләмә. Төп элементар функцияләрдән чикле сандагы алгебраик гамәлләр һәм чикле сандагы катлаулы функция хасил итү гамәлләре ярдәмендә төзелгән функцияләр элементар функцияләр дип атала.

Мисал

1) $y = \frac{\sqrt{x} \cdot sin^2 x}{\sqrt[3]{x + 5^{2x^2}}} + \sqrt{lg^3 x - 1}$ - элементар функция.

2) $y = |x|$ - элементарная функция түгел.

1.8. Яссылыктагы линияләр

Билгеләмә. Яссылыкның билгеле бер үзлеккә ия булган нокталары күплеге яссылыктагы линия дип атала.

Мәсәлән, яссылыкның ниндидер ноктадан (әйләнә үзәгеннән) тигез ераклыкта урнашкан нокталары күплеге әйләнә дип атала.

Әгәр координатлар системасын сайласак һәм ниндидер линия үзлеген аналитик рәвештә язсак, каралучы объект тигезләмәсен алырбыз.

Билгеләмә. Яссылыктагы бирелгән координатлар системасында L линиясенең тигезләмәсе дип бу L линиясенең барлык нокталары өчен дә үтәлгән, һәм бу линиягә кермәгән бер нокта өчен дә үтәлмәгән $F(x,y)=0$ аңлатмасы атала.

Тигезләмәләр күп төрле булырга мөмкин, ләкин һәр тигезләмәнең дә линия рәвешендәге геометрик образы булмавын әйтеп китәргә кирәк.

Мәсәлән, $x^2+y^2=0$ тигезләмәсе бер $O(0,0)$ноктасын билгели, $(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]=0$ тигезләмәсе ике ноктаны: $O(0,0)$ һәм $A(1,1)$ нокталарын билгели, $x^2+y^2+9=0$ тигезләмәсе бер ноктаны да билгеләми.

1.9. Ике линиянең үзара урнашуы

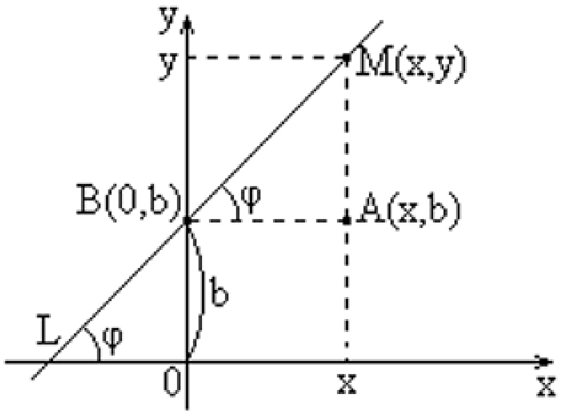
Ике линиянең үзара ничек урнашкан икәнен белү өчен бу линияләрнең тигезләмәләрен белергә кирәк. Әгәр бу тигезләмәләрдән торган система ярашлы булса, линияләрнең уртак нокталары бар, булмаса юк. Уртак нокталар саны тигезләмәләр системасының чишелешләр санына тигез.

Мәсәлән, $x+y=3, x^2+y^2=49$ туры сызык һәм әйләнәнең ике уртак ноктасы бар, чөнки бу тигезләмәләр системасы ике тамырга ия:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2+y^2=49 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ (3-y)^2+y^2=49 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y^2-3y-20=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{89}}{2} \\ x_{1,2}=\dfrac{3\mp\sqrt{89}}{2} \end{cases}$$

Яссылыктагы туры (рәс.1.13)



Рәс.1.13

Декарт координатлар системасында Ox күчәренә ϕ почмагы белән урнашкан L турысын карыйк.

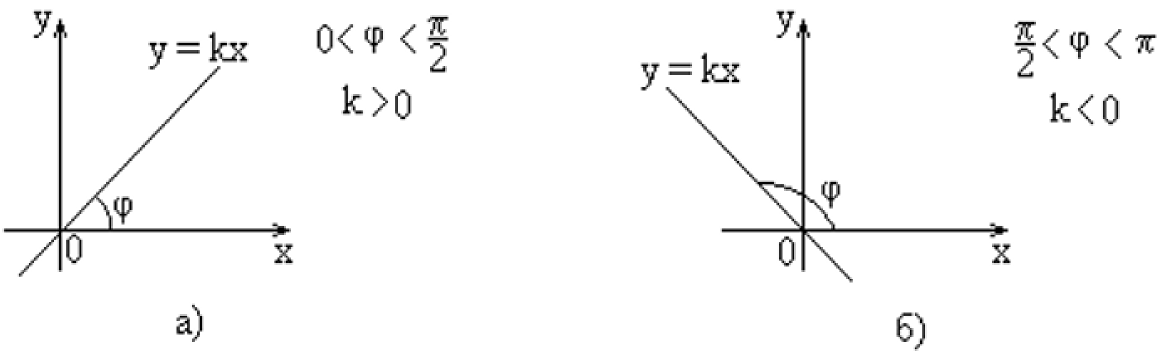
L ирекле $M(x, y)$ ноктасын алыйк. ΔABM өчпочмагыннан туры авышлыгы почмагы тангенсын табабыз: $tg\phi = \frac{AM}{AB} = \frac{y-b}{x}$.

Турының почмакча коэффициентын кертик $k = tg\phi \Rightarrow k = \frac{y-b}{x}$.

Соңгы тигезлектән $y = kx + b$

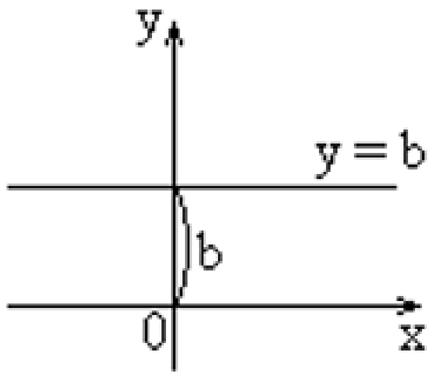
Бу тигезләмә турының почмакча коэффициентлы тигезләмәсе дип атала.

1.10. Туры тигезләмәсенең аерым очраклары



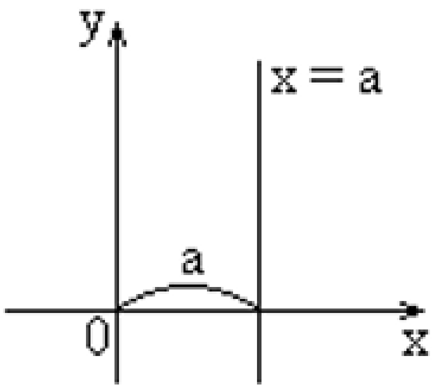
Рәс.1.14

Әгәр $b = 0$ булса, $y = kx$ (рәс.1.14 а,б) һәм туры тигезләмәсе координатлар башы аша Ox күчәренә ϕ почмагы белән үткән турыдан гыйбарәт



Рәс.1.15

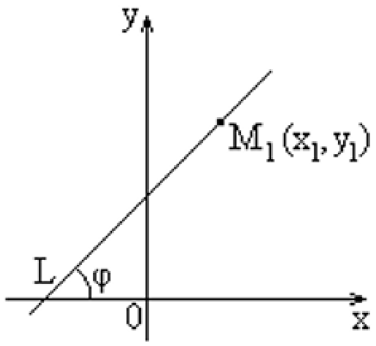
$k = 0$ (ягъни $tg\phi = 0$) икән, $y = b$ һәм тигезләмә Ox күчәренә параллель турыны билгели (рәс.1.15)



Рәс.1.16

$\phi = \frac{\pi}{2}$ булса $L \perp Ox$ L турысы Ox күчәрендә a озынлыгындагы кисемтә кисеп ала дип фараз итик. Андый туры тигезләмәсе $x = a$ була (рәс.1.16).

1.11 Бирелгән юнәлештә бирелгән туры аша үтүче туры тигезләмәсе



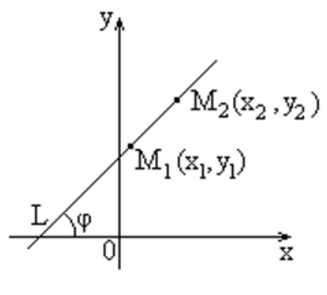
Рәс.1.17

L турысы Ox күчәре белән ϕ почмагы төзесен һәм $M_1(x_1, y_1)$ ноктасы аша үтсен. $M_1 \in L$ булганга, аның координатлары туры тигезләмәсен канәгатьләндерә, ягъни $y_1 = kx_1 + b$ (рәс.1.17) Моннан b ны табабыз һәм туры тигезләмәсенә куябыз. Табабыз:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Табылган тигезләмә турының нокта һәм почмакча коэффициент k буенча тигезләмәсе дип атала

Ике бирелгән нокта аша үтүче туры тигезләмәсе (рәс.1.18)



Рәс.1.18

L турысына кергән ике нокта, $M_1(x_1, y_1)$ һәм $M_2(x_2, y_2)$билгеле булсын. Туры тигезләмәсен M_1ноктасы һәм k почмакча коэффициенты буенча язуйк:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

M_2 ноктасы шулай ук L турысына кергәнгә, аның координатлары бу тигезлекне канәгатьләндерәчәк:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1). \quad (*)$$

Соңгы тигезлектән $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. k өчен аңлатманы (*) гә куябыз: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, ике нокта буенча туры тигезләмәсен табабыз:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

1.12 Турының гомуми тигезләмәсе һәм аны тикшерү

Почмакча коэффициентлы туры тигезләмәсен карыйк: $y = kx + b$. Аны түбәндәге рәвештә күчереп языйк: $y - kx - b = 0$,

$$Ax + By + C = 0$$

Соңгысы турының гомуми тигезләмәсе дип атала, A һәм B берьюлы нульгә тигез түгел, ягъни $A^2 + B^2 \neq 0$. Аерым очракларын карыйк:

$A = 0$ булса, тигезләмәдә x юк, ул Ox күчәренә параллель турыдан гыйбарәт: $y = -\frac{C}{B} = b$. Әгәр $A = C = 0, B \neq 0 \Rightarrow y = 0$ - Ox күчәре.

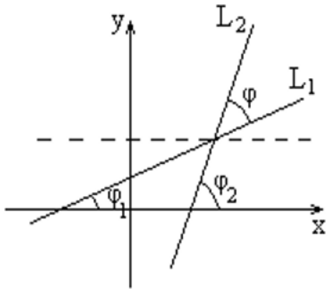
$B = 0$ булса (тигезләмәдә y юк), туры Oy күчәренә параллель

$$x = -\frac{C}{A} = a$$

$B = C = 0 \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow x = 0$ - Oy күчәре.

3) $C = 0$ булса, $y = -\frac{A}{B}x$ һәм туры координатлар башы аша үтә.

Ике туры арасындагы почмак (рәс.1.19)



Рәс.1.19

Билгеләмә. L_1 һәм L_2 турылары арасындагы почмак дип бу турыларның кисешү ноктасы тирәсендә L_1 турысын L_2 турысы белән тәңгәл килгәнче сәгать теленә каршы бору өчен кирәк булган почмак атала.

L_1: $y_1 = k_1x_1 + b_1$; $\mathrm{k}_1 = \mathrm{tg}\phi_1$ *һәм*

L_2: $\mathrm{y} = k_2x_2 + b_2$; $\mathrm{k}_2 = \mathrm{tg}\phi_2$.

Турылар арасындагы почмакны $\phi = \phi_2 - \phi_1$. дип билгелик. Табабыз:

$$tg\phi = tg(\phi_2 - \phi_1) = \frac{tg\phi_2 - tg\phi_1}{1 + tg\phi_1 \cdot tg\phi_2}$$

$tg\phi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

1.13 Турыларның параллельлек һәм перпендикулярлык шартлары:

$L_1 \| L_2 \Rightarrow \phi = 0$ һәм $tg\phi = 0$.Димәк, $k_2 - k_1 = 0$, ягъни турыларның почмакча коэффициентлары үзара тигез:

$k_2 = k_1$ - *ике турының параллельлек шарты.*

Әгәр $L_1 \perp L_2 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$ һәм $tg\phi$ булмый (чиксезлек), $ctg\phi = 0$.

$ctg\phi = \frac{1}{tg\phi} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1}$, димәк, $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, ягъни почмакча коэффициентлар тапкырчыгышы –1 гә тигез:

$k_1 \cdot k_2 = -1$ – ике турының перпендикулярлык шарты.

Әгәр ике туры номуми формадагы тигезләмәләр белән бирелгән булса:

L_1: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ яки $y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1}$ L_2: $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ яки $y = -\frac{A_2}{B_2} x - \frac{C_2}{B_2}$. Ул вакытта

әгәр ике туры параллель икән, $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$ яки

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ - үзгәрешлелеәр янындагы коэффициентлар пропорциональ булырга тиеш;

әгәр ике туры перпендикуляр икән, $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) \cdot \left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$ яки

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$ – үзгәрешлеләр янындагы коэффициентлар тапкырчыгышы суммасы нульгә тигез.

Турыларның кисешү ноктасы

Әгәр $L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ һәм $L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ турылары бирелгән икән, аларның кисешү ноктасы координатлары һәр туры тигезләмәсен канәгатьләндерергә тиеш, ягъни алар система чишелеше булып тора:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Турылар параллель түгел, ягъни $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ икән, система чишелеше бар һәм бердәнбер.

1.14 Сызыкча тигезләмәләр системасы

n билгесезле n сызыкча тигезләмәләр системасын чишү

n билгесезле m сызыкча тигезләмәләр системасы мондый рәвешле була

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

биредә a_{ij}, b_i $(i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n)$ – тиңдәшле рәвештә үзгәрешлеләр янындагы коэффициентлар һәм ирекле буыннар дип аталучы теләсә нинди саннар.

Кыскача язмасы: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ $(i = 1,2,\ldots m)$.

Билгеләмә. Системаның чишелеше дип системаның һәр тигезләмәсенә куйганда дөрес тигезлек китереп чыгаручы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ җыелмасы атала.

1) Әгәр системаның һич югында бер чишелеше булса, тигезләмәләр системасы ярашлы дип атала

2) Әгәр тигезләмәләр системасының бер генә чишелеше булса ул билгеләнгән, бер чишелештән күбрәк чишелеше булса, билгеләнмәгән була.

3) Әгәр ике тигезләмәләр системасының бер үк чишелешләр күплеге (мәсәлән, бер чишелеше) булса, алар эквивалент (тигезкөчле) дип атала.

n тигезләмәдән һәм n билгесездән торган тигезләмәләр системасын карыйк

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Крамер теоремасы. Δ – системаның матрицасы A ның билгеләгече, ә Δ_j - A матрицасыннан j нчы багананы иректе буыннар баганасы белән алыштырудан чыккан матрица билгеләгече булсын. ул вакытта, $\Delta \neq 0$ булса, системаның бердәнбер чишелеше бар һәм ул:

$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = 1,2,\ldots,n$ – Крамер формуласы буенча табыла.

Мисал. Тигезләмәләр системасын Крамер формуласы буенча чишәргә

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Чишү. Система билгеләгечен табабыз: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$

Димәк, системаның бердәнбер чишелеше бар. Δ дан беренче, икенче, өченче буыннарны иректе буыннар баганасы белән алыштырып табылган $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, билгеләгечләрен исәплибез:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Крамер формулалары буенча:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1.$

Системаны матрицалы формада язабыз: $A \cdot X = B$,биредә

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ - үзгәрешлеләр янындагы коэффициентлар матрицасы

$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - үзгәрешлеләр матрица-баганасы

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots . \\ b_n \end{pmatrix}$ - ирекле буыннар матрица-баганасы

Матрица формасындагы тигезләмәнең ике ягын да A^{-1} гә тапкырлыйк:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1}B;$

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B;$

$E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$

$X = A^{-1} \cdot B.$

Шулай итеп, система чишелеше матрицалы рәвештә $X = A^{-1} \cdot B$ формасында языла.

Мисал. Әле генә чишелгән мисалны кире матрица ысулы белән чишәргә.

Чишү. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot X = B.$ Матрица билгеләгече A $det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,$ ягъни кире матрица A^{-1} бар: $A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$

Табабыз: $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

1.15 Гаусс методы – үзгәрешлелеләрне эзлекле бетереп бару

Гаусс үзгәртүләрен тигезләмәләр белән түгел, аларның коэффициентларының киңәйтелгән матрицасы A_p белән башкару уңайлы, ул A матрицасына B ирекле буыннар баганасын өстәп табыла

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{n1}a_{n2} \dots a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Мисал. Системаны Гаусс методы белән чишәргә

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

Системаның киңәйтелгән матрицасын язабыз. 1 адым. a_{11} коэффициенты 1 булсын өчен, беренче һәм икенче юлларның урыннарын алыштырабыз. 2 адым. Беренче юл элементларын -2 гә һәм -1 гә тапкырлыйбыз һәм аларны тиңдәшле рәвештә икенче һәм өченче юл элементларына кушабыз, бу a_{11} элементы астында беренче баганада нульләр булсын өчен кирәк; 3 адым. Өченчек юл элементларын -0,5 кә тапкырлыйбыз. 4 адым. Икенче һәм өченче юлларның урыннарын алыштырабыз. 5 адым. Икенче һәм өченче баганалар урыннарын алыштырабыз. (3, 4, 5 нче адымнар $a_{22} = 1$ булсын өчен кирәк). 6 адым. икенче юл элементларын 3 кә тапкырлыйбыз һәм аларны өченче юл элементларына кушабыз, ул вакытта a_{22} элементы астында нуль пәйда була.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -11 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Киңәйтелгән матрица өчпочмаклы хәлгә китерелде. Аңа тиңдәш система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_2 = -1 \\ x_3 + 4x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Соңгы тигезләмәдән $x_2 = 1$; икенчесеннән $x_3 = 2 - 4x_2 = -2$; беренчесеннән $x_1 = -1 - 2x_3 - 4x_2 = -1 + 4 - 4 = -1$.

Шулай итеп, $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$

n билгесезле m сызыкча тигезләмәләр системасын чишү

Кронекер-Капелли теоремасы. Сызыкча тигезләмәләр системасы система матрицасы рангы бу системаның киңәйтелгән атрицасы рангына тигез булганда һәм бары шул вакытта гына ярашлы: $r(A)=r\left(A_p\right)$

Ярашлы сызыкча тигезләмәләр системасы өчен түбәндәге теоремалар үтәлә:

1 теорема. Әгәр ярашлы система матрицасы рангы үзгәрешлелеәр санына тигез, ягъни $r=n$ икән, системаның бердәнбер чишелеше бар.

2 теорема. Әгәр ярашлы система матрицасы рангы үзгәрешлеләр саныннан азрак, ягъни $r<n$ икән, система билгеләнмәгән һәм аның чишелешләр саны чиксез.

Билгеләмә. Матрицаның базис миноры дип тәртибе матрица рангына тигез булган теләсә нинди нульгә тигез булмаган минор атала.

Билгеләмә. Коэффициентлары базис миноры язмасына кергән r билгесез базис (яисә төп) билгесезләр дип, калган $(n-r)$ билгесез ирекле (яисә төп булмаган) билгесезләр дип атала.

$r<n$ булганда тигезләмәләр системасын чишү – базис үзгәрешлелеәрне ирекле үзгәрешлеләр аша күрсәтү ул. Бк вакытта тигезләмәләр системасының гомуми чишелеше алына. Әгәр барлык $(n-r)$ ирекле үзгәрешле дә нульгә тигез икән, система чишелеше базис дип атала.

Мисал. Системаны Гаусс методы белән чишәргә.

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_2-x_3+2x_4=2\\ 2x_1+2x_2+3x_4=3\end{cases}$$

Чишү. системаның киңәйтелгән матрицасын язабыз һәм үзгәртәбез. Башта өченче юл элементларына беренче юлның -1 гә тапкырланган элементларын кушабыз. Аннары икенче юл элементларын -1 гә тапкырлыйбыз һәм өченче юл элементларына кушабыз.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&1\\0&1&-1&2&2\\2&2&0&3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&1\\0&1&-1&2&2\\0&1&-1&2&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&1&1&1&1\\0&1&-1&2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Киңәйтелгән матрица баскычсыман рәвешкә китерелде.

$r(A) = r(A_p) = 2$. Матрица рангы 2, ә билгесезләр саны 4 булганга, системаның чиксез күп чишелеше бар. Базис билгесезләр сыйфатында x_1 һәм x_2 не алабыз (чөнки аларның коэффициентларыннан торган билгеләгеч нульгә тигез түгел ($\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$), ул вакытта x_3 һәм x_4 иректле билгесезләр.

Базис үзгәрешлеләрне иректле үзгәрешлеләр аша күрсәтәбез. Табылган матрицаның икенче юлыннан x_2 не күрсәтик:

$x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \;\; x_2 = 2 + x_3 - 2x_4.$

Беренче юлдан x_1 не күрсәтик: $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$

$x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_2 - x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(1 - 2 - x_3 + 2x_4 - x_3 - x_4) = -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_4.$

Тигезләмәләр системасының гомуми чишелеше:

$x_1 = -\frac{1}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_4, \;\; x_2 = 2 + x_3 - 2x_4.$

2. ФУНКЦИЯНЕҢ ЧЫГАРЫЛМАСЫ ҺӘМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

2.1. Чикләмәләр һәм өзлексезлек

Санлы эзлеклелек чикләмәсе

Билгеләмә. Әгәр һәр n натураль санына билгеле бер a_n саны тәңгәл куелган икән, $\{a_n\}$ эзлеклелеге бирелгән диләр:

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$

Башкача әйткәндә, санлы эзлеклелек ул натураль аргумент функциясе: $a_n = f(n)$.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ саннары эзлеклелек буыннары, ә a_n саны бирелгән эзлеклелекнең гомуми яисә n – нчы буыны дип атала.

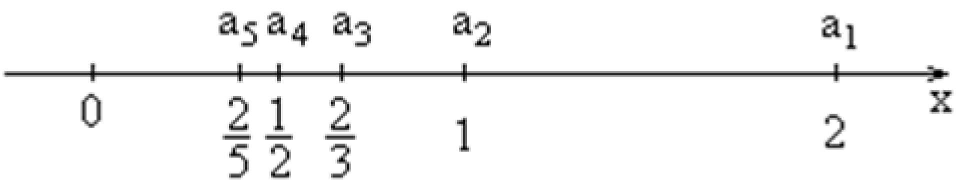
Санлы эзлеклелек мисаллары:

1) $2,4,6,8, \ldots, 2n, \ldots$

2) $1,0,1,0, \ldots$

3) $2,1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots$

$2,1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots$, санлы эзлеклелеген, аны нокталар белән саннар күчәрендә сурәтләп карыйк (рәс.2.1).



Рәс.2.1

Күргәнебезчә, эзлеклелек буыннары a_n n үсү белән 0 гә теләсә никадәр якын килә. Бу вакытта $|a_n - 0|$ аермасының абсолют кыйммәте һаман да кечерәк була.

Билгеләмә. Әгәр дә теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен эзлеклелекнең $n > N$ номерлы барлык буыннары өчен $|a_n - A| < \varepsilon$ булырлык ε га бәйле N табылса, A саны $\{a_n\}$ санлы эзлеклелегенең чикләмәсе дип атала.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ дип тамгалыйлар.

Чикләмәсе булган эзлеклелек җыелучан, булмаса таралучан була.

$\{x_n\}$ эзлеклелеге, әгәр $\exists M\ \forall x_n,\ x_n \le M$ булса, өстән чикләнгән дип, әгәр $\forall x_n\ \exists m\quad x_n \ge m$ булса астан чикләнгән дип, әгәр $\forall x_n\ \exists M\quad |x_n| \le M$ булса чикләнгән дип атала..

$lim\, x_n = a \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) > 0{:}\ \ \forall n > N\ \ |x_n - a| < \varepsilon$ булачак.

$\{x_n\}$ әгәр $lim\, x_n = 0$ булса чиксез кечкенә дип атала.

Мисал: $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$, ягъни $\forall n > \frac{1}{\varepsilon}\ \ |x_n| < \varepsilon$ булачак.

2.2. Чиксез кечкенә эзлеклелек үзлекләре:

Чиксез кечкенә эзлеклелек чикләнгән.

α_n – чиксез кечкенә булсын. Ул вакытта $\exists N = N(\varepsilon){:}\ \ \forall n > N\ \ |\alpha_n| < 1$ булачак. $M = max\left(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, \left|\alpha_{[N]}\right|, \varepsilon\right)$ дип кертик. Ул вакытта $\forall n\ \ |\alpha_n| \le M$ булачак. Димәк, α_n чикләнгән.

Теләсә нинди чикле сандагы чиксез кечкенәләр суммасы чиксез кечкенә булачак.

Башта ике чиксез кечкенә өчен исбатлыйк. α_n һәм β_n – чиксез кечкенәләр булсын. $\forall \varepsilon > 0$ алыйк. Ул вакытта $\exists N_1$ һәм N_2 $\forall n > N_1$ өчен $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ һәм $\forall n > N_2\quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ булачак. $N = max(N_1, N_2)$ дип алыйк. Ул вакытта $\forall n > N$ өчен $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Димәк, $\alpha_n + \beta_n$ – чиксез кечкенә.

Аналогия буенча, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n =$ ч.к. $+$ ч.к. $=$ ч.к. һ.б.ш.

Чиксез кечкенәләрнең аермасы чиксез кечкенә.

$|\alpha_n - \beta_n| = |\alpha_n + (-\beta_n)| \le |\alpha_n| + |-\beta_n| = |\alpha_n| + |\beta_n|$ һәм димәк, үткән теоремадагы кебек, шул ук ε һәм N нар өчен $|\alpha_n - \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\ \ \forall n > N$.

Чикле эзлеклелекнең чиксез кечкенәгә тапкырчыгышы чиксез кечкенә булачак.

α_n – чиксез кечкенә, ә x_n – чикләнгән булсын. Ул вакытта $\exists M > 0$, $|x_n| \leq M$ (чикләнгәнлек билгеләмәсеннән). $\forall\varepsilon > 0$ алыйк. Ул вакытта, α_n – чиксез кечкенә булганга, $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ булачак. Ул вакытта $\forall n > N$ $|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ да булачак. Димәк, $\alpha_n x_n$ – чиксез кечкенә.

Әгәр α_n – чиксез кечкенә һәм $\alpha_n = const$ икән, $\alpha_n \equiv 0$.

α_n чиксез кечкенә һәм $\alpha_n = C \neq 0$ булсын. $\varepsilon = \frac{|C|}{2}$ дип алыйк. Ул вакытта, чиксез кечкенә билгеләмәсе буенча, $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|\alpha_n| < \varepsilon$ булачак, ягъни $|C| < \frac{|C|}{2}$ яки $1 < \frac{1}{2}$, ә бу мөмкин түгел. Чыккан каршылык теореманы исбатлый.

$\{x_n\}$ эзлеклелеге, әгәр $lim|x_n| = \infty$ икән, чиксез зур дип атала, ягъни $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ булачак.

Әгәр $\{x_n\}$ чиксез зур икән, нинди булса да n нан башлап булса да $\frac{1}{x_n}$ эзлеклелеге билгеләнгән һәм ул чиксез кечкенә.

Мәсәлән, $\varepsilon = 1$дип алыйк. Ул вакытта $\exists N = N(\varepsilon)$: $|x_n| > 1$ $\forall n > N \Rightarrow$ $\forall n > N$ $\frac{1}{x_n}$ билгеләнгән.

$\forall\varepsilon > 0$ дип алыйк. Ул вакытта, $\{x_n\}$ чиксез зур булганга, $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ булачак. Ул вакытта $\forall n > N$ $\frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x_n}$ – чиксез кечкенә.

Әгәр дә санның теләсә нинди кечкенә тирәлеге тышында эзлеклелекнең чикләнгән сандагы буыннары ята икән, бу сан бирелгән эзлеклелекнең чикләмәсе булып тора.

$x_n \to a$ икән, $|x_n| \to |a|$.

$\forall\varepsilon > 0$ алыйк. Ул вакытта $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow |x_n| \to |a|$.

$x_n = a + \alpha_n$ булырлык чиксез кечкенә α_n булганда, һәм шул вакытта гына $lim\, x_n = a$.

2.3 Эзлеклелек чикләмәсенең бердәнберлеге турында теорема:

Әгәр $\lim x_n = a$ һәм $\lim x_n = b$ булса, $a = b$.

$\lim x_n = a$ һәм $\lim x_n = b$ булсын. Ул вакытта α_n һәм β_n чиксез кечкенәләре бар: $x_n = a + \alpha_n$ һәм $x_n = b + \beta_n$. $x_n = x_n$ булганга, $a + \alpha_n = b + \beta_n$ ($\forall n$ өчен), $\alpha_n - \beta_n = b - a = \text{const} \Rightarrow \alpha_n - \beta_n = 0 \Rightarrow b - a = 0 \Rightarrow b = a$.

Җыелучан эзлеклелек чикләнгән.

$\lim x_n = a(a \neq \pm\infty)$ булганга, $x_n = a + \alpha_n$, биредә α_n - чиксез кечкенә. Ләкин чиксез кечкенә чикләнгән, ягъни $\exists M$ $|\alpha_n| \leq M$ $\forall n \Rightarrow |x_n| = |a + \alpha_n| \leq |a| + |\alpha_n| = |a| + M$.

Әгәр $\lim x_n = b \neq 0$ икән, ниндидер n нан башлап булса да, $\frac{1}{y_n}$ билгеләнгән һәм чикләнгән.

$y_n \to b$, булганга, $|y_n| \to |b|$. $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ дип алыйк. Ул вакытта, $|y_n| \to |b|$ булганга, $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall n > N$ $|b| - \varepsilon < |y_n| < |b| + \varepsilon$ булачак, ягъни $|y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$. Биредән барлык $n > N$ өчен $\frac{1}{y_n}$ билгеләнгән һәм $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$.

Әгәр $\lim x_n = a$ һәм $a < b$ икән, кайсыдыр n нан башлап, барлык $x_n < b$.

$\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ дип алыйк. Ул вакытта $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, ягъни $x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < \frac{b+b}{2} = b$.

Ниндидер номердан башлап булса да $x_n \leq b$ һәм $\lim x_n = a$ икән, $a \leq b$.

$\lim x_n = a > b$ булсын. Ул вакытта $\exists N$: $\forall n > N$ $x_n > b$ булачак.

Чикләмәгә күчкәндә, тигезсезлек тигезлеккә әверелергә мөмкин. Мисал: $x_n = \frac{1}{n} > 0$, $\lim x_n = 0$.

Әгәр $x_n \in (a; b)$ һәм $\exists \lim x_n = C$ икән, $C \in (a; b)$.

Теорема формулировкасында $x_n \leq a$ тигезсезлегенең ниндидер номердан башлап үтәлүе җитә.

$x_n \leq y_n$ һәм чикле $lim\, x_n$ һәм $lim\, y_n$ бар икән, $lim\, x_n \leq lim\, y_n$.

$x_n \leq y_n$ булганга, $y_n - x_n \geq 0$ һәм $\exists\, lim(y_n - x_n) = lim\, y_n - lim\, x_n$. Теорема буенча, $lim(y_n - x_n) \geq 0$, ягъни $lim\, y_n - lim\, x_n \geq 0$, биредән $lim\, y_n \geq lim\, x_n$.

2.4. Кысылган үзгәрешле турында теорема:

$\forall n$, ниндиеннәндер башлап, $x_n \leq y_n \leq z_n$ һәм $\exists\, lim\, x_n = lim\, z_n = a$ булсын. Ул вакытта $\exists\, lim\, y_n = a$.

Исбатлау. N_1 – шундый сан булсын ки, $\forall n > N_1$ $x_n \leq y_n \leq z_n$ булачак. $\forall \varepsilon > 0$ алыйк. $lim\, x_n = a$ булганга, $\exists N_2$: $\forall n > N_2$ өчен $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ булачак. Аналогия буенча, $lim\, z_n = a$ булганга, $\exists N_3$: $\forall n > N_3$ өчен $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ булачак. $N = max(N_1, N_2, N_3)$ дип тамгалыйк. Ул вакытта $\forall n > N$ өчен барлык өч икеле тигезсезлек тә үтәләчәк: $a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$, ягъни $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$ яки $|y_n - a| < \varepsilon$, ә бу $lim\, y_n = a$ га тигезкөчле. Исбатланды.

2.5 Җыелучан эзлеклелекләр белән арифметик гамәлләр

Чикле $lim\, x_n$ һәм $lim\, y_n$ булсын. Ул вакытта мондый чикләмәләр бар:

1. $lim(x_n \pm y_n) = lim\, x_n \pm lim\, y_n$.
2. $lim(x_n \cdot y_n) = lim\, x_n \cdot lim\, y_n$.
3. Әгәр $lim\, y_n \neq 0$ икән, $lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{lim\, x_n}{lim\, y_n}$.

$lim\, x_n = a$, һәм $lim\, y_n = b$ булсын. Ул вакытта $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = a + \beta_n$, биредә α_n и β_n – чиксез кечкенәләр.

1. $x_n + y_n = a + \alpha_n + b + \beta_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$, биредән $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n =$ ч.к. $\rightarrow x_n + y_n \rightarrow a + b$, ягъни $lim(x_n + y_n) = a + b = lim\, x_n + lim\, y_n$.

2. Аналогия буенча $x_n \cdot y_n - ab = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) - ab = ab + \alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n - ab = \alpha_n b + a\beta_n + \alpha_n\beta_n =$ ч.к. $\Rightarrow lim(x_n \cdot y_n) = ab = lim\, x_n \cdot lim\, y_n$.

3. $\frac{x_n}{y_n}-\frac{a}{b}=\frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n}-\frac{a}{b}=\frac{ab+\alpha_n b-ab-a\beta_n}{ab^2-b\beta_n}=\frac{b\alpha_n-a\beta_n}{b(b+\beta_n)}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{y_n}\cdot(b\alpha_n-a\beta_n)=$ ч.к. $\Rightarrow lim\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}=\frac{lim\, x_n}{lim\, y_n}$.

2.6 Монотон эзлеклелекләр һәм аларның чикләмәләре

Әгәр дә $\forall n\ \ x_n \le x_{n+1}$ икән, эзлеклелек кимемәүче дип атала. Әгәр дә $\forall n$ будет $x_n < x_{n+1}$ булса, эзлеклелек үсүче була.

Теләсә нинди кимемәүче эзлеклелек астан, үсмәүче өстән чикләнгән.

Әгәр кимемәүче эзлеклелек өстән чикләнгән икән, аның чикле чикләмәсе була.

x_n кимемәсен һәм өстән чикләнгән булсын. Ул вакытта, төгәл чик турындагы теорема буенча, чикле $sup\{x_n\}=a$ бар. $a=lim\, x_n$ икәнен исбатлыйк. $\forall\varepsilon>0$ алыйк. Билгеләмә буенча, $sup\{x_n\}, \exists x_N: a-\varepsilon<x_N\le a$. Ул вакытта $\forall n>N$ өчен $a-\varepsilon<x_N\le x_n\le a$ булачак. Димәк, $\forall n>N$ өчен $|x_n-a|<\varepsilon$ булачак, ягъни $lim\, x_n=a$.

Теорема дөреслеге өчен монотонлыкның ниндидер номердан башлап булуы җитә.

$\{x_n\}$ кимеми һәм өстән чикләнмәгән икән, $lim\, x_n=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$ алыйк. x_n өстән чикләнмәгән булганга $\exists x_N: x_N>\varepsilon$, т.е. $x_n>\varepsilon$ для $\forall n>N\Rightarrow lim\, x_n=\infty$.

<u>Монотон эзлеклелекнең җыелу критерие:</u> Монотон эзлеклелек ул чикләнгән булганда тһәм шул вакытта гына чикләмәгә ия.

$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ эзлеклелегенең чикле чикләмәсе бар. Ул e саны дип атала һәм 2,71828182846…га тигез.

1. Ньютон биномы формуласын файдаланыйк: $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}+\ldots++\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!n^k}+\ldots+\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\quad\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$.

2. x_n үсә икәнен күрсәтик. x_{n+1} не язык һәм x_n белән чагыштырыйк. $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + +\ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$. x_{n+1} дә һәр кушылучы x_n дагысыннан зуррак, чөнки $1 - \frac{k}{n+1} > 1 - \frac{k}{n}$ һәм x_{n+1} дә әле артык кушылучы бар. Димәк, $x_{n+1} > x_n$.

3. x_n өстән чикләнгәнлеген күрсәтик: $x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!} <$ (чөнки $n! \geq 2^{n-1}$)$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \quad = 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$.

4. Бирелгән $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow$ һәм $x_n < 3$, ул вакытта чикле $\lim x_n$ бар. $2 \leq \lim x_n \leq 3$ икәне ачык.

2.7 Кертелмәле кисемтәләр турында теорема:

Кертелмәле кисемтәләр эзлеклелеге бирелгән булсын: $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \supset [a_3; b_3] \supset \ldots \supset |a_n; b_n|$, өстәвенә $[a_n; b_n] \to 0,\ n \to \infty$. Ул вакытта $\forall n$ бердәнбер $C \in [a_n; b_n]$ ноктасы бар һәм $C = \lim a_n = \lim b_n$.

1. C ноктасының бар икәнен исбатлыйк. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq$ … икәнен искәртик, ягъни a_n кимеми. Моннан тыш $\forall n$ $a_n < b_n \leq b_1$, ягъни $\{a_n\}$ өстән b_1 саны белән чикләнгән. Теорема буенча $\exists \lim a_n = m$. Чөнки $b_n = a_n + (b_n - a_n); a_n \to m; b_n - a_n \to 0$, ягъни $\exists \lim b_n = m$. Бу вакытта $m = \sup a_n = \inf b_n$, ягъни $m \in [a_n; b_n]\ \forall n \Rightarrow m = C$.

2. C – бердәнбер икәнен исбатлыйк. Башка $D \neq C$ ноктасы булсын һәм ул $\forall n$ өчен $[a_n; b_n]$кисемтәсенә керсен. Ул вакытта $[C; D] \subset [a_n; b_n]\ \ \forall n$. Димәк, $\forall n$ өчен $[a_n; b_n]$озынлыгы $= b_n - a_n \geq [C; D]$озынлыгы $= |D - C| > 0$. Шуңа күрә $[a_n; b_n] \to 0$ була алмый, ә бу шартка каршы килә.

2.8. Асэзлеклелекләр һәм өлешчә чикләмәләр

$\{x_n\}$ эзлеклелеге һәм натураль саннар эзлеклелеге бирелгән булсын: $\{n_k\}: n_{k+1} > n_k \quad \forall k$. x_{n_k} эзлеклелеге x_n эзлеклелегенең асэзлеклелеге дип атала.

Әгәр n_k – натураль саннар эзлеклелеге һәм $n_{k+1} > n_k$ икән, $n_k \geq k$.

Бу $n_k = (n_k - n_{k-1}) + (n_{k-1} - n_{k-2}) + \ldots + n_1 \geq$ (чөнки монда һәр кушылучы ≥ 1)$\geq (k-1) \cdot 1 + 1 = k$ дән чыга.

Әгәр $\exists\, lim\, x_n = a$ икән, теләсә кайсы асэзлеклелек x_{n_k}өчен $lim\, x_{n_k} = a$ булачак.

Исбатлау.

1. a чикле булсын. Ул вакытта $\forall \varepsilon > 0 \exists N$: $\forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$ булачак. $\forall k > N$ алыйк. Ул вакытта $n_k \geq k > N$ һәм, димәк, $\forall k > N$ $\left|x_{n_k} - a\right| < \varepsilon$ булачак, ягъни $lim\, x_{n_k} = a$.

2. $a = -\infty$ булсын. Ул вакытта $\forall k > 0 \exists N$: $\forall n > N \quad x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$ булачак. Биредән $\forall k > N \quad n_k > N$ булачак, һәм, димәк, $\forall k > N x_{n_k} < -\frac{1}{\varepsilon}$, ягъни $lim\, x_{n_k} = -\infty$.

Асэзлеклелек чикләмәсе өлешчә чикләмә дип атала.

Больцано-Вейерштрасс леммасы: Теләсә нинди чикләнгән эзлеклелектән җыелучан асэзлеклелек аерып алып була.

Исбатлау. $\{x_n\}$ эзлеклелеге бирелгән булсын, өстәвенә $a \leq x_n \leq b$. $[a; b]$ ны урталай $\frac{a+b}{2}$ ноктасы белән бүлик. Ул вакытта $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]; \left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ кисемтәләренең берсендә x_n эзлеклелегенең чиксез күп элементлары ята. Андый кисемтәне $[a_1; b_1]$ дип билгелик.Икесендә дә булса,сул кисемтәне алыйк (аныклык өчен) Гамәлне кабатлыйк һәм табылган кисемтәне $[a_2; b_2]$ дип билгелибез. Процессны дәвам итәбез. Нәтиҗәдә кертелмәле кисемтәләр эзлеклелеген табабыз: $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset \ \supset [a_n; b_n]$, өстәвенә озынлык $[a_n; b_n] = b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2}}{4} = \ldots = \frac{b-a}{2^n} \to 0,$ һәм барлык кисемтәләрдә $[a_n; b_n]$ чиксез күп x_n бар. Кертелмәле кисемтәләр турындагы лемма буенча бердәнбер $C = lim\, a_n = lim\, b_n.$ ноктасы бар. Эзләнүче асэзлеклелекне төзик. x_{n_1} сыйфатында $x_n \in [a; b]$ дан теләсә нинди ноктаны сайлыйбыз. Аннары $[a_2; b_2]$ дән $x_{n_2}: n_2 > n_1$ сайлана. Бу мөмкин, чөнки $[a_2; b_2]$ дә чиксез күп x_n ята. Аналогия буенча x_{n_k} ноктасын $[a_k; b_k]: n_k > n_{k-1}$ кисемтәсеннән сайлыйбыз Асэзлеклелек табыла: $\{x_{n_k}\}: a_k \leq x_{n_k} \leq b_k.$ $a_k \to C$ һәм $b_k \to C,$ булганга, $x_{n_k} \to C,$ ягъни $\{x_{n_k}\}$ җыела.

Әгәр $\{x_n\}$ чикләнмәгән икән, аның чиксез өлешчә чикләмәсе була.

Исбатлау. Мәсәлән, x_n өстән чикләнмәгән булсын. Ул вакытта $\forall \varepsilon > 0$ чиксез күп $x_n > \varepsilon$ элементлары бар (башкача алардан иң зурын сайлап аны өске чик сыйфатында алырга мөмкин булыр иде). x_{n_k} эзлеклелеген болай төзик. $x_{n_1} > 1$ не алыйк, аннары $x_{n_2} > 2, n_2 > n_1$ һ.б.ш. Ул вакытта $x_{n_k} \to \infty$ булуы ачык.

Нәтиҗә: теләсә кайсы эзлеклелекнең бер булса да өлешчә чикләмәсе бар.

a санының теләсә кайсы тирәлегендә $\{x_n\}$ эзлеклелегенең чиксез күп элементлары урнашканда һәм бары шул очракта гына a саны $\{x_n\}$ эзлеклелегенең өлешчә чикләмәсе булып тора.

Исбатлау.

1. a –$\{x_n\}$ эзлеклелегенең өлешчә чикләмәсе булсын. Ул вакытта $\exists x_{n_k} \to a.$ $\forall \varepsilon > 0$ алыйк. Ул вакытта $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ интервалында кайсыннандыр башлап барлык x_{n_k} ятачак.Димәк, теләсә кайсы тирәлектә чиксез күп x_n ята. Әгәр $a = \pm\infty$ икән, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = K(\varepsilon)$: $\forall k > K$ $(\varepsilon; \infty)$ (яки $(-\infty; -\varepsilon)$) тирәлегендә чиксез күп x_n ятачак.

2. Киресенчә, a ның теләсә кайсы тирәлегендә чиксез күп x_n буыны ятсын. Чикле a очрагын карыйк. $\forall \varepsilon > 0$ алыйк һәм $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ тирәлегендә ирекле x_{n_1} сайлыйк. Аннары $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}; a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ тирәлегендә x_{n_2} буынын $n_2 > n_1$итеп сайлыйбыз. Бу мөмкин, чөнки бу тирәлектә чиксез күп x_n бар. x_{n_k}

асэзлеклелеген табабыз, өстәвенә $a-\frac{1}{2^{n-1}}<x_{n_k}<a+\frac{1}{2^{n-1}}$. Кысылган үзгәрешле турындагы теорема буенча, $x_{n_k}\to a$, ягъни. a – өлешчә чикләмә.

a саны эзлеклелек чикләмәсе булуы бу ноктаның теләсә кайсы тирәлегендә кайбер буыннардан тыш эзлеклелекнең барлык буыннары ятуын аңлата. Ә a саны асэзлеклелек чикләмәсе булып торуы бу ноктаның теләсә кайсы тирәлегендә эзлеклелекнең чиксез күп буыннары ятуын белдерә.

$\{x_n\}$ һәм буш булмаган A күплеге – аның барлык өлешчә чикләмәләре күплеге бирелсен. Ул вакытта $sup\,A$ x_n эзлеклегенең өске чикләмәсе ($\overline{lim_n}$ дип тамгалана) ә $inf\ A$ – аскы чикләмәсе була ($\underline{lim_n}$ дип тамгалана).

2.9 Кырый чикләмәләрнең өлешчә чикләмәләргә керүе турында теорема:

$\overline{lim_n}$ – өлешчә чикләмәләрнең иң зуры, ә $\underline{lim_n}$ – иң кечкенәсе.

$\overline{lim_n}$ – өлешчә чикләмә икәнне күрсәтү җитә (Ул вакытта ул иң зуры).

1. Башта $\overline{lim_n}=a,$ булсын, a – чикләнгән сан. a санының теләсә кайсы тирәлегендә x_n ның чиксез күп буыны бар икәнен исбатлыйк. $\forall\varepsilon>0$ алыйк. $sup\,A$ билгеләмәсе буенча $\exists y\in A{:}\,y\in\left(a-\frac{\varepsilon}{2};a\right)$. Ләкин y – x_n ның өлешчә чикләмәсе чөнки y өлешчә чикләмәләр күплеге A га керә. Димәк, $\left(y-\frac{\varepsilon}{2};y+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ кисемтәсендә чиксез күп x_n ятачак. $y-\frac{\varepsilon}{2}>a-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=a-\varepsilon,$ $y+\frac{\varepsilon}{2}\le a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$, ягъни $\left(y-\frac{\varepsilon}{2};y+\frac{\varepsilon}{2}\right)\in(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ һәм, димәк, $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ кисемтәсендә $\forall\varepsilon>0$ булганда чиксез күп x_n ята $\Rightarrow a$ – өлешчә чикләмә.

2. $\overline{lim_n}=\infty$ булсын. Ул вакытта өлешчә чикләмәләр күплеге A өстән чикләнмәгән. Биредән x_n ның өстән чикләнмәгән икәне чыга. (әгәр дә $x_n\le M,$ үтәлсә, барлык өлешчә чикләмәләр M нан кечерәк булырлар иде). Димәк, өзлеклелекнең ∞ кә тигез булган өлешчә чикләмәсе бар.

2.10 Эзлеклелекнең җыелу критерие

Эзлеклелекнең чикләмәсе булсын өчен, аның бер генә өлешчә чикләмәсе булуы кирәк һәм шул җитә.

Исбатлау.

1. $\exists \lim x_n = a$ булсын. Ул вакытта $\forall x_{n_k}$ $\lim x_{n_k} = a$, ягъни $\{x_n\}$ эзлеклелегенң бердәнбер чикләмәсе бар һәм ул a.

2. $\{x_n\}$ эзлеклелегенең a га тигез бердәнбер өлешчә чикләмәсе булсын. Әгәр $a \neq \lim x_n$ икән, ниндидер тирәлек $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ тышында чиксез күп x_n ятачак, мәсәлән, чиксез күп $x_n > a+\varepsilon$. Мондый эзлеклелек карыйк: $\{x_m\} \in \{x_n\}$, анда $x_m > a+\varepsilon$ булсын. $\{x_m\}$ эзлеклелегенең өлешчә чикләмәсе бар: $\lim x_{m_s} = B$. $x_m \geq a+\varepsilon$ булганга, B – шулай ук $\{x_n\}$ эзлеклелегенең өлешчә чикләмәсе һәм $B \neq a$. Бирелгән шарт буенча $\{x_n\}$ эзлеклелегенең ике өлешчә чикләмәсе була алмый, димәк, $a = \lim x_n$.

$\{x_n\}$ эзлеклелегенең җыелуы өчен $\{x_n\}$ эзлеклелегенең бер өлешчә чикләмәсе булуы һәм $\{x_n\}$ чикле булуы кирәк һәм җитә.

Исбатлау.

1. $\{x_n\}$ җыелсын, ул вакытта $\{x_n\}$ эзлеклелегенең бердәнбер өлешчә чикләмәсе бар һәм $\{x_n\}$ чикләнгән.

2. $\{x_n\}$ эзлеклелегенең a га тигез бердәнбер өлешчә чикләмәсе булсын һәм ул чикләнгән булсын, ягъни $\exists m$ и $M: m \leq x_n \leq M$. Ул вакытта $\exists \lim x_n = a$ һәм $m \leq a \leq M$, ягъни $\{x_n\}$ җыела

$\{x_n\}$ җыелсын өчен $\overline{\lim_n}\ x_n = \underline{\lim_n} x_n$ булуы һәм $\{x_n\}$ чикле булуы кирәк һәм җитә.

1. $x_n \to a, a \neq \pm\infty$ булсын. Ул вакытта $\{x_n\}$ эзлеклелегенең бердәнбер өлешчә чикләмәсе a бар һәм $\overline{\lim_n}\ x_n = \underline{\lim_n} x_n$. Моннан тыш, $\{x_n\}$ чикләнгән, чөнки $a \neq \pm\infty$

2. $\overline{lim_n}\ x_n = \underline{lim_n} x_n$ булсын. Ул вакытта $\{x_n\}$ эзлеклелегенең a га тигез бердәнбер өлешчә чикләмәсе бар, димәк, $\exists\, lim\, x_n = a$ һәм, $\{x_n\}$ чикләнгән булганга, $a \neq \pm\infty$.

Билгеләмә. Әгәр дә $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ һәм теләсә нинди натураль m өчен $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$ тигезсезлеге үтәлсә, $\{x_n\}$ эзлеклелеге фундаменталь эзлеклелек дип атала.

2.11 Эзлеклелекләр җыелуның Коши критерие:

Эзлеклелек җыелсын өчен аның фундаменталь булуы кирәк һәм шул җитә.

Исбатлау.

1. Кирәклек. $x_n \to a$ булсын. $\forall\varepsilon > 0$ алыйк. Чикләмә билгеләмәсе буенча, чикле a өчен $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ булачак. Ул вакытта теләсә нинди натураль m өчен $n + m > N$ һәм, димәк, $|x_{n+m} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Бирелән $\forall n > N$ һәм теләсә нинди натураль m өчен $|x_{n+m} - x_n| = |x_{n+m} - a + a - x_n| \leq |x_{n+m} - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow |x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$, ягъни $\{x_n\}$ - фундаменталь.

2. Җитәрлек. $\{x_n\}$ – фундаменталь эзлеклелек булсын. $\{x_n\}$ чикләнгән һәм $\overline{lim_n}\ x_n = \underline{lim_n} x_n$ икәнен исбатлыйк. Бирелән җыелучанлык чыгачак.

2.1 Чикләнгәнлекне исбатлыйк. $\forall\varepsilon > 0$ алыйк. Ул вакытта $\exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n > N$ һәм теләсә нинди натураль m өчен $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$. $n = [N] + 1 > N$ дип беркетик. Ул вакытта теләсә нинди натураль m өчен $\left|x_{[N]+1+m} - x_{[N]+1}\right| < \varepsilon$ булачак. Бирелән $x_{[N]+a} - \varepsilon < x_{[N]+1+m} < x_{[N]+1} + \varepsilon$, бирелән $\left|x_{[N]+1+m}\right| < \left|x_{[N]+1}\right| + \varepsilon$ $\forall n > N$ һәм теләсә нинди натураль m. $M = max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, \left|x_{[N]}\right|, \left|x_{[N]+1}\right| + \varepsilon\right)$ дип куйыйк. Ул вакытта $|x_n| \leq M$ $\forall n$, чөнки $\{x_n\}$ чикләнгән.

2.2 $\overline{lim_n}\ x_n = \underline{lim_n} x_n$. икәнен исбатлыйк. Фундаменталь эзлеклелек билгеләмәсе буенча, $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall n$ һәм $k > N$ $|x_k - x_n| < \varepsilon$, булачак, ягъни $x_n - \varepsilon < x_k < x_n + \varepsilon$. Димәк, $x_n - \varepsilon \le \overline{lim_n}\ x_n \le \underline{lim_n} x_n \le x_n + \varepsilon$. Ул вакытта $\forall\varepsilon > 0$ будет $0 \le \overline{lim_n}\ x_n - \underline{lim_n} x_n \le 2\varepsilon \Longrightarrow \overline{lim_n}\ x_n = \underline{lim_n} x_n$. (әгәр $\overline{lim_n}\ x_n - \underline{lim_n} x_n = a > 0$ икән, каршылыкка килү өчен $\varepsilon = \frac{a}{4}$, дип алу җитә.).

2.3 Эзлеклелек чикләнгән һәм $\overline{lim_n}\ x_n = \underline{lim_n} x_n$ булганга, $\{x_n\}$ ның чикле чикләмәсе бар.

2.12. Функциянең чиксезлектә һәм ноктада чикләмәсе

Билгеләмә. Әгәр дә теләсә нинди, хәтта теләсә никадәр кечкенә $\varepsilon > 0$ саны өчен $|x| > S$ үтәлгән барлык x өчен $|f(x) - A| < \varepsilon$ булырлык ε га бәйле $S > 0$ саны табылса, A саны $y = f(x)$ функциясенең x чиксезлеккә омтылгандагы чикләмәсе дип атала.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ яки $f(x) \to A, x \to \infty$ дип тамгалыйлар.

Билгеләмә. Әгәр дә теләсә нинди, хәтта теләсә никадәр кечкенә $\varepsilon > 0$ саны өчен барлык $x \ne x_0$, $|x - x_0| < \delta$ өчен $|f(x) - A| < \varepsilon$ булырлык ε га бәйле $\delta > 0$ саны табылса, A саны $y = f(x)$ функциясенең x x_0 гә омтылгандагы (яисә x_0 ноктасындагы) чикләмәсе дип атала.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ яки $f(x) \to A,\ x \to x_0$ дип тамгалыйлар.

2.13. Чиксез кечкенә һәм чиксез зур зурлыклар

Билгеләмә. Әгәр $x \to x_0$ яки $x \to \infty$ булганда $\alpha(x)$ функциясенең чикләмәсе нульгә тигез икән, ягъни

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \alpha(x) = 0$$

булса, ул $x \to x_0$ яки $x \to \infty$ булганда чиксез кечкенә зурлык дип атала.

Чиксез кечкенә зурлыкларның функцияләр чикләмәләре белән бәйләнеше

1 теорема. Әгәр $f(x)$ функциясе $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда A га тигез чикләмәгә ия икән, аны бу A саны һәм $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булгандагы чиксез кечкенә $\alpha(x)$ зурлыгы суммасы рәвешендә күрсәтеп була, ягъни

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

2 теорема. Әгәр $f(x)$ функциясен A саны һәм һәм $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булгандагы чиксез кечкенә $\alpha(x)$ зурлыгы суммасы рәвешендә күрсәтеп була икән, A саны бу функциянең $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булгандагы чикләмәсе була, ягъни

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A.$$

2.14.Чиксез кечкенә зурлыкларның үзлекләре

1) Чикле сандагы чиксез кечкенә зурлыкларның алгебраик суммасы чиксез кечкенә зурлык.

2) Чиксез кечкенә зурлыкның чикле функциягә (шул исәптән константага, башка чиксез кечкенәгә) тапкырчыгышы чиксез кечкенә зурлык

3) Чиксез кечкенә зурлыкны чикләмәсе нкльгә тигез булмаган функциягә бүлүдән чыккан өлеш чиксез кечкенә зурлык.

Ике чиксез кечкенә чагыштырмасы ($\left[\frac{0}{0}\right]$ рәвешле билгесезлек) санаучы һәм ваклаучыдагы үзгәрешлеләрнең үзгәрү характерына бәйле рәвештә яки сан, яки чиксез кечкенә яки чиксезлек булырга мөмкин.

Билгеләмә. Әгәр $y = f(x)$ функциясенең $x \to x_0 (x \to \infty)$ булганда чикләмәсе чиксезлеккә тигез, ягъни

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) = \infty$$

икән, бу функция $x \to x_0(x \to \infty)$ булганда чиксез зур дип атала.

2.15. Чиксез зур зурлыклар үзлекләре

1) Чиксез зур зурлыкның чикләмәсе нульгә тигез булмаган функциягә тапкырчыгышы чиксез зур зурлык

2) Чиксез зур зурлык һәм чикле функция суммасы чиксез зур зурлык

3) чиксез зур зурлыкны чикләмәсе булган функциягә бүлүдән чыккан өлеш чиксез зур зурлык.

Ике чиксез зур зурлыкның чагыштырмасы яисә аермасы турында берни дә әйтеп булмый. Бу очракларда $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ яки $[\infty - \infty]$ рәвешендәге билгесезлекләр турында әйтәләр. Үзгәрү характерына бәйле рәвештә аларның чагыштырмасы яисә аермасы яки сан, яки чиксез кечкенә, яки чиксез зур булырга мөмкин.

2.16. Чиксез кечкенә һәм чиксез зур зурлыклар арасындагы бәйләнеш

Теорема. Әгәр $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда $\alpha(x)$ чиксез кечкенә зурлык икән, $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда $f(x) = 1/\alpha(x)$ чиксез зур зурлык була һәм киресенчә, әгәр $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда $f(x)$ чиксез зур икән, $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда $\alpha(x) = 1/f(x)$ функциясе чиксез кечкенә зурлык булып тора.

2.17. Чикләмәләр турында төп теоремалар. Чикләмә барлыгы билгеләре

$f(x)$ һәм $\phi(x)$ функцияләренең $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ булганда чикләмәләре булсын: $\lim\limits_{x \to x_0(\infty)} f(x) = A$, $\qquad$ $\mathop{lim}\limits_{x \to x_0(\infty)} \phi(x) = B$. Чикләмәләр турында төп теоремалар мондый:

1) Функциянең бердән артык чикләмәсе була алмый.

2) Чикле сандагы функцияләр суммасы чикләмәсе бу функцияләр чикләмәләре суммасына тигез, ягъни

$$\mathop{lim}_{x \to x_0(\infty)} [f(x) + \phi(x)] = A + B$$

3) Чикле сандагы функцияләр тапкырчыгышы чикләмәсе бу функцияләр чикләмәләре тапкырчыгышына тигез, ягъни

$$\mathop{lim}_{x \to x_0(\infty)} [f(x) \cdot \phi(x)] = A \cdot B$$

Аерым алганда, константаны чикләмә билгесе алдына чыгарырга ярый, ягъни

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} [c \cdot f(x)] = c \cdot A$$

4) Ике функция өлеше чикләмәсе, әгәр бүлүче чикләмәсе нульгә тигез булмаса, бу функцияләрнең чикләмәләре өлешенә тигез, ягъни

$\lim_{x \to x_0(\infty)} [f(x)/\phi(x)] = \frac{A}{B}, B \neq 0.$

5) Әгәр $\lim_{u \to u_0} f(u) = A$, $\lim_{x \to x_0} \phi(x) = u_0$ икән, катлаулы функция чикләмәсе

$$\lim_{x \to x_0} f[\phi(x)] = A$$

6) Әгәр x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә (яки x җитәрлек дәрәҗәдә зур булганда) $f(x) < \phi(x)$ икән,

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) \leq \lim_{x \to x_0(\infty)} \phi(x)$$

2.18. Чикләмә барлыгы билгеләре

1 теорема. Әгәр $\{a_n\}$ санлы эзлеклелеге монотон һәм чикләнгән икән, аның чикләмәсе бар.

2 теорема. Әгәр x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә (яисә x ның җитәрлек дәрәҗәдә зур кыйммәтләре өчен) $f(x)$ функциясе $x \to x_0$ (яисә $x \to \infty$)булганда чикләмәләре бер үк A саны булган $\phi(x)$ һәм $\varphi(x)$ функцияләре арасында урнаша икән, $f(x)$ функциясе чикләмәсе шул ук A саны булачак.

2.19. Төп чикләмәләр

1) Беренче төп чикләмә $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2) Икенче төп чикләмә

Билгеләмә. e саны дип (икенче төп чикләмә) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ санлы эзлеклелеге чикләмәсе атала:

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e, n = 1,2,3, \ldots$

$2 < e < 3,\ e = 2{,}718281828$ ... (Эйлер иррациональ саны)

Әгәр $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ функциясен карасак, $x \to \infty$ булганда ул шулай ук e санына тигез чикләмәгә ия

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Әгәр $z = \frac{1}{x}$ дип куйсак, $\lim_{z\to 0}(1 + z)^{1/z} = e$

1^∞ рәвешле билгесезлекләрне ачканда һәрвакытта икенче төп чикләмә файдаланыла.

Мисаллар

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{4x^5+x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^5}\right)}{x^5\left(4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^5}}{4+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}} = \frac{0+0}{4+0+0} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4-3x}-3x^2}{\sqrt[3]{27x^6+2}+2x-5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x^3}\right)}-3x^2}{\sqrt[3]{x^6\left(27+\frac{2}{x^6}\right)}+2x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}-3x^2}{x^2\sqrt[3]{27+\frac{2}{x^6}}+2x-5}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{1-\frac{3}{x^3}}-3\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{27+\frac{2}{x^6}}+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{1-0}-3}{\sqrt[3]{27+0}+0-0} = -\frac{2}{3}.$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)(x+0{,}5)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x-1} = \infty$

4. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} =$
$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}\right)} = \frac{2}{4(2+2)} = \frac{1}{8}$

5. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to -1}\frac{x-1-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1}\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \infty$

6. $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 3}\frac{x+3-6}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} =$
$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

7. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2} = [1^\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x^2+1)-4}{2x^2+1}\right)^{-3x^2} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}\cdot\frac{-4}{2x^2+1}\cdot(-3x^2)} == \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x^2+1}\right)^{\frac{2x^2+1}{-4}}\right]^{\frac{12x^2}{2x^2+1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{x^2(2+1/x^2)}=} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{2+1/x}} = e^{\frac{12}{2}} = e^6$$

2.20. Функция өзлексезлеге

1 нче билгеләмә. Әгәр $f(x)$ функциясе түбәндәге шартларны канәгатьләндерә икән, ул x_0 ноктасында өзлексез дип атала:

1) x_0 ноктасында билгеләнгән, ягъни $f(x_0)$ бар;

2) $x\to x_0$ булганда уңнан да сулдан да чикле берьяклы чикләмәләре бар;

3) Бу чикләмәләр функциянең x_0 ноктасындагы кыйммәтенә тигез, ягъни

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

Мисал. Функцияләрне $x=0$ ноктасында өзлексезлеккә тикшерергә:

а) $y=x^2$, б) $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$

Чишү. а) $y=x^2$. $x=0$ булганда функция билгеләнгән, $\lim\limits_{x\to 0-0} x^2=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^2=0$, $y(0)=0$, ягъни функциянең ноктада өзлексезлегенең барлык өч шарты да үтәлгән. Димәк, $y=x^2$ функциясе $x=0$ ноктасында өзлексез.

б) $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$. $x=0$ булганда функция билгеләнмәгән; $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = \frac{1}{1+0} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$. Шулай итеп, $x=0$ ноктасында функция өзлексез түгел, чөнки ноктада өзлексезлекнең беренче һәм өченче шартлары үтәлмәгән.

2 нче билгеләмә. Әгәр $y=f(x)$ функциясе x_0 ноктасында билгеләнгән һәм аргументның чиксез кечкенә үсемтәсенә функциянең чиксез кечкенә үсемтәсе туры килә, ягъни $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ икән, бу функция x_0 ноктасында өзлексез дип атала.

1 нче һәм 2 нче билгеләмәләр тигезкөчле.

2.21. Ноктада өзлексез функцияләр үзлеләре

1. Әгәр $f(x)$ һәм $\phi(x)$ функцияләре x_0 ноктасында өзлексез икән, аларның суммалары $f(x)+\phi(x)$, тапкырчыгышлары $f(x)\cdot\phi(x)$ һәм өлешләре $f(x)/\phi(x)$ ($\phi(x_0)\neq 0$ шарты үтәлгәндә) шулай ук x_0 ноктасында өзлексез булалар.

2. Әгәр $y=f(x)$ функциясе x_0 ноктасында өзлексез һәм $f(x_0)>0$ икән, x_0 ноктасының $f(x)>0$ булган тирәлеге бар.

3. Әгәр $y=f(u)$ функциясе u_0 ноктасында өзлексез, һәм $u=\phi(x)$ функциясе x_0 ноктасында өзлексез булса, $y=f[\phi(x)]$ катлаулы функциясе x_0 ноктасында өзлексез була.

2.22. Аралыкта өзлексез функция

Билгеләмә. Әгәр $y=f(x)$ функциясе X аралыгының һәр ноктасында өзлексез икән, ул бу аралыкта өзлексез дип атала.

Барлык элементар функцияләр үз билгеләнү өлкәләрендә өзлексез.

2.23. Функциянең өзелү нокталары

Билгеләмә. Әгәр дә ниндидер x_0 ноктасында $y=f(x)$ функциясе өчен өзлексезлекнең һич югында бер шарты үтәлмәсә, бу нокта функциянең өзелү ноктасы дип атала.

Өстәвенә: 1) Әгәр функциянең үзара тигез булмаган чикле берьяклы чикләмәләре бар, ягъни $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ икән, x_0 ноктасы I төр өзелү ноктасы була;

2) Әгәр дә функциянең $\lim\limits_{x\to x_o-0} f(x)$ яки $\lim\limits_{x\to x_o+0} f(x)$ чикләмәләренең һич югында берсе чиксезлеккә тигез яисә юк икән, x_0 ноктасы II төр өзелү ноктасы була.

2.24. Кисемтәдә өзлексез функция үзлекләре

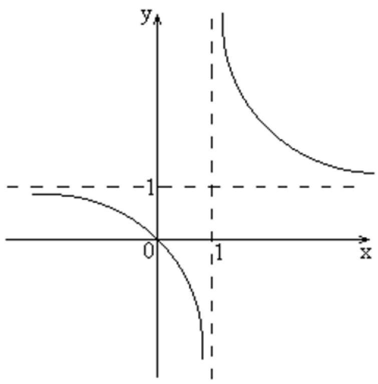
1. Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез икән, ул бу кисемтәдә чикләнгән.

2. Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез икән, ул бу кисемтәдә иң кечкенә m һәм иң зур M кыйммәтләренә ирешә (Вейерштрасс теоремасы)

3. Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез һәм кисемтә очларында $f(a)$ һәм $f(b)$ капма-каршы тамгалы булсалар, кисемтә эчендә $f(\zeta) = 0$ булырлык ζ ноктасы бар (Больцано-Коши теоремасы)

Мисал. $y = \frac{x}{x-1}$ функциясен өзлексезлеккә тикшерергә һәм аның өзелү нокталарын табарга. Өзелү характерын билгеләргә.

Чишү. $x = 1$ булганда функция билгеләнмәгән, димәк, $x = 1$ ноктасында функция өзелә: $\lim_{x \to 1-0} \frac{x}{x-1} = -\infty$, а $\lim_{x \to 1+0} \frac{x}{x-1} = +\infty$. Берьяклы чикләмәләр чиксез, шуңа $x = 1$ ноктасы икенче төр өзелү ноктасы (рәс.2.2)..



Рәс.2.2

2.25 Дифференциаль исәпләү

Функция чыгарылмасы.

$y = f(x)$ функциясе X аралыгында билгеләнгән булсын. $x \in X$ ноктасын алыйк. x кыйммәтенә $\Delta x \neq 0$ үсемтәсе бирик, ул вакытта функция $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ үсемтәсе алачак.

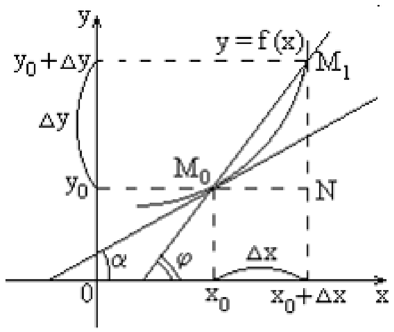
Билгеләмә. $y = f(x)$ функциясе чыгарылмасы дип Δx үсемтәсе нульгә омтылганда функция үсемтәсенең аргумент үсемтәсенә чагыштырмасы чикләмәсе атала, ягъни

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Тамгалары: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, y'_x$

2.26. Орынма турында мәсьәлә

Oxy яссылыгында $y = f(x)$ өзлексез функциясе графигы бирелгән һәм бу кәкрегә $M_0(x_0, y_0)$ ноктасында орынма тигезләмәсен табарга кирәк булсын (рәс.2.3).



Рәс.2.3

Туры тигезләмәсе, бу турыга керүче $M_0(x_0, y_0)$ ноктасы һәм почмакча коэффициенты буенча мондый рәвешле була:

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

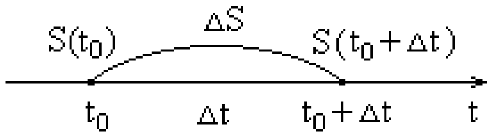
Биредә $k = tg\alpha$, (α – турының авышлык почмагы).

$\Delta M_0 M_1 N$ өчпочмагыннан $M_0 M_1$ кисүчесенең авышлык почмагы тангенсын табабыз: $tg\phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Әгәр M_1 ноктасын M_0 ноктасына якынайтсак, ϕ почмагы α, почмагына омтылачак, ягъни $\Delta x \to 0$ булганда, $tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Димәк, $k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

2.27. Хәрәкәт тизлеге турында мәсьәлә



Рәс.2.4

Ниндидер туры буенча $S = S(t)$ законы буенча нокта хәрәкәт итә, биредә S – үтелгән юл, t – вакыт һәм ноктаның t_o мизгелендәге тизлеген табарга кирәк булсын (рәс.2.4).

t_0 вакыт мизгелендә юл $S_0 = S(t_0)$, ә $(t_0 + \Delta t)$ вакыт мизгелендә юл $S_1 = S(t_0 + \Delta t)$. Ул вакытта:

$\Delta S = S_1 - S_0$ - Δt вакыты эчедә үтелгән юл.

Ул вакытта Δt вакыты эчендә уртача тизлек $v_{\text{ур}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$, ә мизгелдәге тизлек $v_{\text{м}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ур}}$, ягъни $v_{\text{м}} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'$

2.28. Хезмәт җитештерүчәнлеге турында мәсьәлә

$u = u(t)$ функциясе t вакыты эчендә җитештерелгән u продукциясен белдерсен һәм t_0 вакыт мизгелендәге хезмәт җитештерүчәнлеген табарга кирәк булсын.

t_0 дән $t_0 + \Delta t$ гә кадәр вакыт эчендә җитештерелгән продукция күләме $u_0 = u(t_0)$ $u_1 = u(t_0 + \Delta t)$, гә кадәр үзгәрә, биредә $u_1 = u_0 + \Delta u,\ t_1 = t_0 + \Delta t$. Ул вакытта t_0 вакыт мизгелендә уртача хезмәт җитештерүчәнлеге $z_{\text{ур}} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ дип языла, ә хезмәт җитештерүчәнлеге

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'$$

- Орынма турындагы мәсьәләдән *чыгарылманың геометрик мәгънәсе* чыга: x_0 ноктасындагы $f'(x_0)$ чыгарылмасы $y = f(x)$ графигына x_0 ноктасында үткәрелгән орынманың почмакча коэффициенты (авышлык почмагы тангенсы) булып тора, ягъни $k = f'(x_0)$. Ул вакытта $y = f(x)$

графигына x_0 ноктасында үткәрелгән орынма тигезләмәсе мондый рәвешле булачак:

- $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
- Хәрәкәт тизлеге турындагы мәсьәләдән *чыгарылманың механик мәгънәсе* чыга: юлның вакыт буенча чыгарылмасы $S'(t_0)$ t_0 вакыт мизгелендәге тизлеккә тигез: $v(t_0) = S'(t_0)$.
- Хезмәт җитештерүчәнлеге турындагы мәсьәләдән җитештерелгән продукция күләменең вакыт буенча чыгарылмасы $u'(t_0)$ t_0 вакыт мизгелендәге хезмәт җитештерүчәнлегенә тигез икәне чыга (*чыгарылманың экономик мәгънәсе*).

2.29. Функция өзлексезлеге һәм дифференциалланучанлык нисбәте

Теорема. Әгәр $y = f(x)$ функциясе x_0 ноктасында дифференциалланучан икән, ул бу ноктада өзлексез.

Кире теорема дөрес түгел, ягъни әгәр функция ноктада өзлексез икән, аның бу ноктада дифференциаллануы мәҗбүри түгел.

2.30. Чыгарылма исәпләү схемасы

$y = f(x)$ функциясенең чыгарылмасын мондый схема буенча исәпләп була:

1. x аргументына Δx үсемтәсе бирәбез һәм функциянең үсемтә кыйммәтен табабыз: $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

2. функция үсемтәсен табабыз:$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ чагыштырмасын төзибез.

4. Бу чагыштырманың $\Delta x \to 0$ булгандагы чикләмәсен табаыз (әгәр булса)

Мисал. $y = x^3$ функциясе чыгарылмасын билгеләмә буенча табарга.

Чишү.

$y + \Delta y = y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3,$

$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$
$\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$,

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$. Шулай итеп, $(x^3)' = 3x^2$.

Теләсә нинди $n \neq 0$ өчен $(x^n)' = nx^{n-1}$ икәнен исбатларга мөмкин

2.31 Дифференциаллау кагыйдәләре. Элементар функцияләр чыгарылмалары

1. Константа чыгарылмасы нульгә тигез, ягъни $c' = 0$

2. Аргумент чыгарылмасы 1 гә тигез, ягъни $x' = 1$

3. Чикле сандагы функцияләрнең алгебраик суммасы чыгарылмасы бу функцияләрнең чыгарылмалары суммасына тигез, ягъни

$$(u + v)' = u' + v'$$

4. Ике дифференциалланучы функция тапкырчыгышы чыгарылмасы беренче тапкырлашучы чыгарылмасы белән икенче тапкырлашучы тапкырчыгышы һәм икенче тапкырлашучы чыгарылмасы белән беренче тапкырлашучы тапкырчыгышы суммасына тигез, ягъни

$(uv)' = u'v + uv'$

1 нче нәтиҗә. Даими тапкырлаучыны чыгарылма билгесе тышына чыгарырга була:

$$(cu)' = cu'$$

2 нче нәтиҗә. Берничә дифференциалланучы функция тапкырчыгышы чыгарылмасы һәр тапкырлаучы чыгарылмасының калган тапкырлашучыларга тапкырчыгышлары суммасына тигез:

$$(vuw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

5. Ике дифференциалланучы функция өлеше чыгарылмасын мондый формула буенча табып була:

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, $v \neq 0$.

2.32 Катлаулы функция чыгарылмасы

$y = f[\phi(x)]$ катлаулы функция бирелгән булсын.

Теорема. Әгәр $y = f(u)$ һәм $u = \phi(x)$ үз аргументларының дифференциалланучы функцияләре икән, катлаулы функциянең чыгарылмасы бар һәм бу функциянең арадаш аргумент буенча чыгарылмасының арадаш аргументның бәйсез x буенча чыгарылмасы тапкырчыгышына тигез, ягъни

$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_x$.

Башка язма: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Мисал. $y = \left(\sqrt{x} + 5\right)^3$ функциясе чыгарылмасын табарга.

Чишү. $u = \left(\sqrt{x} + 5\right)$ дип тамгалыйк, ул вакытта

$y'_x = (u^3)_u{}' u'_x = 3u^2 \cdot u'_x = 3\left(\sqrt{x} + 5\right)^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.33 Элементар функцияләр чыгарылмалары

$y = ln\, x, y' = \frac{1}{x}$

$y = log_a x, y' = \frac{1}{x\, ln\, a}$

$y = e^x, y' = e^x$

$y = a^x, y' = a^x\, ln\, a$

$y = sin\, x, y' = cos\, x$

$y = cos\, x, y' = -sin\, x$

$y = tgx, y' = \frac{1}{cos^2 x}$

$y = ctgx, y' = -\frac{1}{sin^2 x}$.

2.34 Югары дәрәҗәле чыгарылмалар

Билгеләмә. $y = f(x)$ функциясенең n – нчы дәрәҗә чыгарылмасы $y^{(n)}(x)$ дип $(n-1)$ нче дәрәҗә чыгарылмадан чыгарылма атала:

$$y^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$$

Аерым алганда, $y'' = [f'(x)]', y''' = [f''(x)]'$

Мисал. Әгәр $y(x) = cos^2 3\,x$ икән, $y'''(x)$ не табарга.

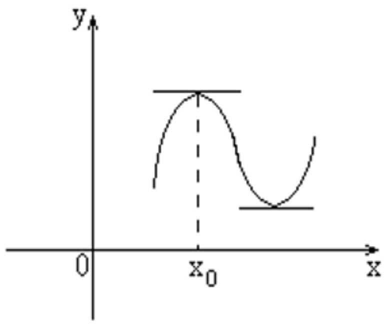
Чишү. $y'(x) = 2\,cos\,3\,x \cdot (-\,sin\,3\,x) \cdot 3 = -3\,sin\,6\,x$,

$y''(x) = (-3\,sin\,6\,x)' = -3\,cos\,6\,x \cdot 6 = -18\,cos\,6\,x$,

$y'''(x) = (-18\,cos\,6\,x)' = -18(-\,sin\,6\,x) \cdot 6 = 108\,sin\,6\,x$.

2.35 Чыгарылманың кулланылышы

Дифференциаль исәпләүнең төп теоремалары (рәс.2.5). **Лопиталь кагыйдәсе**

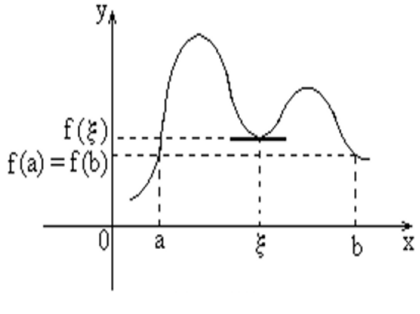


Рәс.2.5

Ферма теоремасы. Әгәр X аралыгында дифференциалланучы $y = f(x)$ функциясе бу аралыкның эчке x_0 ноктасында иң зур яисә иң кечкенә кыйммәткә ирешә икән, бу ноктадагы чыгарылма нульгә тигез, ягъни $f'(x) = 0$.

Геометрик мәгънәсе. Иң зур (иң кечкенә) кыйммәт ноктасында функция графигына орынма абсциссалар күчәренә параллель.

Ролль теоремасы



Рәс.2.6

$y = f(x)$ функциясе түбәндәге шартларны канәгатьләндерсен (рәс.2.6):

1) $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез;

2) (a, b) интервалында дифференциалланучан;

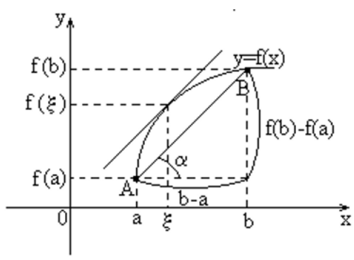
3) Кисемтә очларында тигез кыйммәтләр ала, ягъни $f(a) = f(b)$.

Ул вакытта кисемтә эчендә функция чыгарылмасы нульгә тигез, ягъни $f'(\xi) = 0$ булган кимендә бер $\xi \in (a, b)$ ноктасы бар.

Башкача әйткәндә: Дифференциалланучы функциянең бердәй кыйммәтләре арасында һич югында бер чыгарылма нуле бар.

Геометрик мәгънәсе: (a, b) интервалында теореманың барлык шартларын канәгатьләндерүче $y = f(x)$ функциясе өчен бу функция графигына $(\xi, f(\xi))$ ноктасындагы орынма Ox күчәренә параллель булырлык һич югында бер ξ ноктасы бар.

Лагранж теоремасы



Рәс.2.7

$y = f(x)$ функциясе түбәндәге шартларны канәгатьләндерсен (рәс.2.7):

1) $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез;

2) (a, b) интервалында дифференциалланучан;

Ул вакытта кисемтә эчендә чыгарылма функция үсемтәсенең бу кисемтәдәге аргумент үсемтәсенә чагыштырмага тигез булырлык, ягъни

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

булган һич югында бер $\xi \in (a, b)$ нокта бар.

Геометрик мәгънәсе: $y = f(x)$ өзлексез функциясен карыйк. Анда $A\big(a, f(a)\big)$ и $B\big(b, f(b)\big)$ нокталарын сайлыйк. Бу нокталар аша үткәрелгән туры авышлыгы почмагы тангенсы $tg\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ягъни, лагранж теоремасы буенча $f'(\xi) = tg\alpha$. Шулай итеп, Лагранж теоремасы (a, b) интервалында ул ноктадан функция графигына орынма бу кисемтәдәге график очларын тоташтыручы AB турысына параллель булырлык $\big(\xi, f(\xi)\big)$ ноктасы бар дип раслый.

Лопиталь кагыйдәсе

Ике чиксез кечкенә яисә чиксез зур функөияләрнең чагыштырмасы чикләмәсе аларның чыгарылмалары чагыштырмасының чикләмәсенә тигез (әгәр дә булса).

Шулай итеп, әгәр $\left[\frac{0}{0}\right]$ яки $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ рәвешле билгесезлек бар икән, ул вакытта

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$$

Мисал. Функцияләрнең чикләмәләрен исәпләргә.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{4x^2+x+5}$

Чишү.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(ln(1+x))'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{4x^2+x+5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x^2-2x+1)'}{(4x^2+x+5)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x-2}{8x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(6x-2)'}{(8x+1)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$

2.36 Дифференциалланучы функцияләр өчен Коши теоремасы:

Түбәндәгеләр үтәлсен:

1. $f(x)$ һәм $g(x)$ функцияләре $[a; b]$ кисемтәсендә өзлексез,
2. $f(x)$ һәм $g(x)$ функцияләре $(a; b)$ да булса да дифференциаллана,
3. $(a; b)$ кисемтәсендә $g'(x) \neq 0$

Ул вакытта $\exists C \in (a;b)\colon \frac{f'(C)}{g'(C)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Исбатлау. $g(a) \neq g(b)$ икәненә инаныйк. Әгәр алай булмаса, Ролль теоремасының барлык шартлары да үтәлер һәм $D \in (a;b)\colon g'(D) = 0$ ноктасы булыр иде, ә бу өченче шартка каршы килә. Ярдәмче функция кертик: $\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \big(g(x) - g(a)\big)$.

1. $\phi(x)$ функциясе $(a;b)$ аралыгында өзлексез функцияләрнең сызыкча комбинациясе буларак, өзлексез.

2. $\phi(x)$ функциясе $(a;b)$ кисемтәсендә шул ук сәбәп буенча дифференциаллана, өстәвенә $\phi^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g^{'}(x)$.

3. $\phi(a) = 0$, $\quad \phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = 0$, ягнъни $\phi(a) = \phi(b)$.

Димәк, Ролль теоремасы буенча $\exists C \in (a;b)\colon \phi'(C) = 0$, ягъни $f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x) = 0$ яки $\frac{f^{'}(x)}{g(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

2.37 Тейлор формуласы:

x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә $\exists f'(x_0)$, $\exists f''(x_0)$, …, $\exists f^{(n-1)}(x_0)$ һәм $\exists f^{(n)}(x_0)$. Ул вакытта $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$.

$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ дип тамгалыйк (Тейлор күпбуыны). Бу вакытта $p(x_0) = f(x_0), p'(x_0) = f'(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Шуңа күрә, әгәр $f(x) - p(x) = r(x)$ дип куйсак, $r(x)$ өчен $r(x_0) = 0$, $r'(x_0) = 0$, …, $r^{(n)}(x_0) = 0$ булачак. $r(x) = \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$икәнен исбатлыйк. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r(x)-r(x_0)}{(x-x_0)^n} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r'(x_0)}{(x-x_0)^{n-1}} =\ldots= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r'(x)-r'(x_0)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r''(x)}{(x-x_0)^{n-2}} =\ldots= \lim\limits_{x\to x_0} \frac{r^{(n-1)}(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} r^{(n)}(x) = r^{(n)}(x_0) = 0$. Димәк, $f(x) = p(x) + r(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$.

Тейлор формуласының бердәнберлеге: Әгәр $f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$ и $f(x) = B_0 + B_1(x - x_0) + \ldots + B_n(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$, то $A_0 = B_0, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n$.

$f(x) = f(x)$ булганга, $A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^n = B_0 + B_1(x - x_0) + \ldots + B_n(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)$. x ны x_0 гә омтылдырыйк. Ул вакытта $A_0 = B_0$. A_0 һәм B_0 не алып, $x - x_0$ гә бүлик. Ул вакытта $A_1 + A_2(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^{n-1} = B_1 + B_2(x - x_0) + \ldots + B_n(x - x_0)^{n-1} + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^{n-1}$. Тагын x ны x_0 гә омтылдырыйк. $A_1 = B_1$икәнен табабыз. Аналогия буенча $A_2 = B_2, A_3 = B_3, \ldots, A_n = B_n$.

Әгәр $f(x)$ функциясе x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә $n - 1$ тапкыр дифференциаллана икән, $f^{(n)}(x_0)$ бар һәм $f(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_n(x - x_0)^n + \bar{\bar{o}}(x - x_0)^n$, ул вакытта $A_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, биредә $k = 0,1, \ldots, n$.

$x = x_0 + \Delta x$. дип куйыйк. Ул вакытта, теорема шартларында $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x_0)\Delta x^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)\Delta x^n}{n!} + \cdots + \bar{\bar{o}}(\Delta x^n) = f(x_0) + d\,f\,(x_0) + \frac{d^2\,f(x_0)}{2} + \ldots + \frac{d^n\,f(x_n)}{n!} + \bar{\bar{o}}(d\,x^n)$.

$[x_0; x_0 + h]$ кисемтәсендә $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ өзлексез булсыннар, ә $(x_0; x_0 + h)$ аралыгында $f^{(n+1)}(x)$ булсын. Ул вакытта $\forall p > 0$ өчен $0 < \theta < 1$ саны бар: $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot (x - x_0))}{n!p} \cdot (1 - \theta)^{n-p+1}(x - x_0)^{n+1}$ $\forall x \in [x_0; x_0 + h]$.

Бәяләү лазем: $r(x) = f(x) - p(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Ярдәмче функция кертик: $\phi(z) = f(x) - f(z) - f'(z)(x - z) - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n$, биредә z – үзгәрешле, ә $x = \text{const}$.

1. $\varphi(z)$ функциясе $[x_0; x_0 + h]$ кисемтәсендә өзлексез.

2. $\phi'(z) = -f'(z) - f''(z)(x-z) + f'(z) - \frac{f'''(z)}{2}(x-z)^2 + f''(z)(x-z) - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} = \quad = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$. Чөнки $f^{(n+1)}$ чыгарылмасы $[x_0; x_0+h]$ кисемтәсендә булганга, $\phi^{'}(z)$ функциясе дә шул ук интервалда бар.

3. $\phi(x) = 0, \phi(x_0) = r(x)$.

Түбәндәге шартларны канәгатьләндерүче ирекле $\psi(z)$ функциясен карыйк: $\psi(z)$ өзлексез, дифференциаллана һәм $[x_0; x_0+h]$ кисемтәсендә нульгәтигез түгел һәм Коши теоремасын кулланыйк. Мондый нокта бар: $C \in [x_0; x]$: $\frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\phi'(C)}{\psi'(C)}$, моннан $-r(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(C)} \cdot \left(-\frac{f^{(n+1)}(C)}{n!}(x-C)^n\right)$.

Ул вакытта $r(x) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(C)} \cdot \cdot \frac{f^{(n+1)}(C)}{n!}(x-C)^n$. $\psi(z) = (x-z)^p$ дип алыйк, ул вакытта $\psi'(z) = -p(x-z)^{p-1}$ чыгарылмасы $(x_0; x)$ аралыгында бар һәм $(x_0; x)$ аралыгында $\psi(z) \neq$. Моннан $r(x) = \frac{0-(x-x_0)^p}{-p(x-C)^{p-1}} \cdot \frac{f^{(n+1)}(C)}{n!}(x-C)^n = \frac{f^{(n+1)}(C)}{n!p}(x-C)^{n-p+1}(x-x_0)^p$. $C \in (x_0; x)$ булганга, $C = x_0 + \theta(x-x_0)$ $(0 < \theta < 1)$. Ул вакытта $x - C = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\theta)$, $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1}$.

Аерым очраклар:

$\bar{\bar{o}}(x-x_0)^n$ буыны Пеано формасындагы калдык буын дип атала.

$p = n+1$ булганда $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ һәм ул Лагранж формасындагы калдык буын була.

$p = 1$ булганда $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$ – бу Коши формасындагы калдык буын.

Стандарт таркатылышлар:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n)$.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$.

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n)$.

5. $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n)$

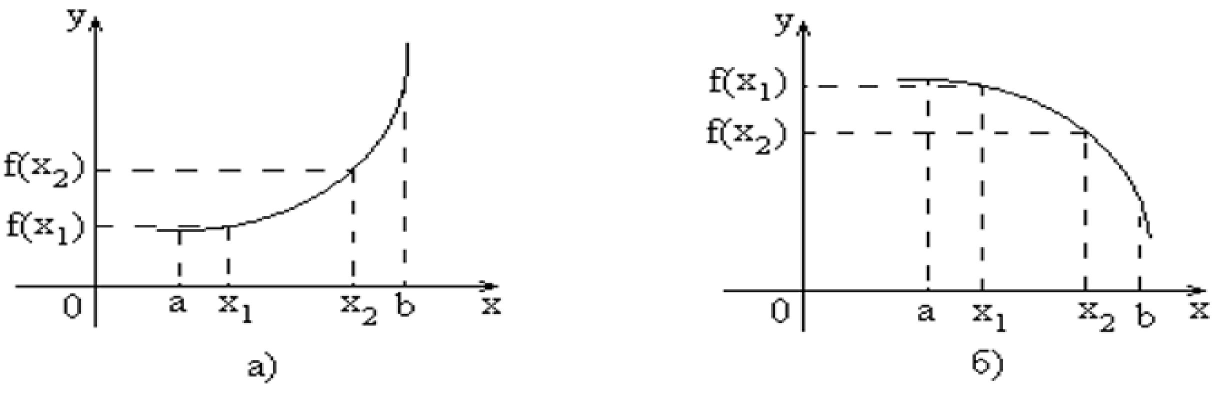
<u>Ньютон биномы формуласы:</u> $(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + x^n$.

2.38 Функцияләрнең үсүләре һәм кимүләре

Билгеләмә. Әгәр (a,b) аралыгындагы зуррак x кыйммәтенә $y = f(x)$ функциясенең зуррак (кечерәк) кыйммәте туры килә икән, бу аралыкта функция үсүче (кимүче) дип атала, ягъни (рәс.2.8 а,б):

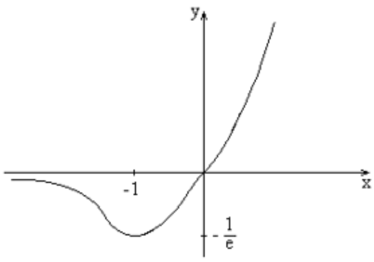
$x_1 < x_2$ булганда $f(x_1) < f(x_2)$ булса, $y = f(x)$ үсүче (а)

$x_1 < x_2$ булганда $f(x_1) > f(x_2)$ булса, $y = f(x)$ кимүче (б)



Рәс.2.8

- **Теорема**. (Функция үсүнең җитәрлек шарты). Әгәр дифференциалланучы функция чыгарылмасы ниндидер X аралыгы эчендә уңай икән, ул бу аралыкта үсә.
- **Теорема.** (Функция кимүнең җитәрлек шарты). Әгәр дифференциалланучы функция чыгарылмасы ниндидер X аралыгы эчендә тискәре икән, ул бу аралыкта кими (рәс.2.9).



Рәс.2.9

Мисал: $y = xe^x$ функциясенең үсү һәм кимү интервалларын табарга.

Чишү. Функциянең чыгарылмасын табабыз:$y' = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$.

x=-1 будганда чыгарылма нульгә әйләнә, $(-\infty; -1)$ интервалында $y' < 0$, $(-1; +\infty)$ интервалында $y' > 0$.

Димәк, функция $(-1; +\infty)$ интервалында үсә һәм $(-\infty; -1)$ интервалында кими.

2.39 Функция экстремумы

Функциянең максимум һәм минимум нокталары экстремумнар дип атала.

Билгеләмә. Әгәр дә x_0 ноктасының ниндидер тирәлегендә $f(x) \leq f(x_0)$ тигезсезлеге үтәлә икән, бу x_0 ноктасы $f(x)$ функциясенең максимум ноктасы дип атала.

Билгеләмә. Әгәр дә x_1 ноктасының ниндидер тирәлегендә$f(x) \geq f(x_1)$тигезсезлеге үтәлә икән, бу x_1 ноктасы $f(x)$ функциясенең минимум ноктасы дип атала.

Экстремум булуның кирәкле шарты. $y = f(x)$ функциясенең x_0 ноктасында экстремумы булсын өчен аның бу ноктадагы чыгарылмасы нульгә тигез булуы ($f'(x) = 0$) яки бу ноктада чыгарылманың булмавы кирәк.

Искәрмә. Бу шарт җитәрлек шарт түгел, ягъни x_0 ноктасында функция нульгә әверелергә яисә булмаска мөмкин, ә функциянең бу ноктада экстремумы булмаска да мөмкин.

Теорема. (*экстремумның беренче җитәрлек шарты*). Әгәр дә x_0 ноктасы аша күчкәндә $y = f(x)$ дифференциалланучы функция чыгарылмасы тамгасын плюстан минуска үзгәртә икән, x_0 ноктасы функциянең максимум ноктасы, минустан плюска үзгәртә икән, x_0 ноктасы функциянең минимум ноктасы була.

Теорема (*экстремумның икенче җитәрлек шарты*). Әгәр ике тапкыр дифференциалланучы функциянең беренче чыгарылмасы $f'(x)$ ниндидер x_0 ноктасында нульгә тигез, ә икенче чыгарылма $f''(x)$ бу ноктада уңай икән, x_0 ноктасы $f(x)$ функциясенең минимум ноктасы, әгәр $f''(x)$ тискәре икән, x_0 - максимум ноктасы була.

$y = f(x)$ функциясен экстремумга тикшерү схемасы

1. $y' = f'(x)$ чыгарылмасын табарга

2. Чыгарылма нульгә тигез $f'(x) = 0$ яки чыгарылма булмаган критик нокталарны табарга

3. Һәр критик ноктадан сулда һәм уңда чыгарылма тамгасын тикшерергә һәм функция экстремумнары булу-булмау турында нәтиҗә ясарга.

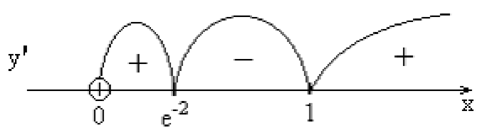
4. Экстремум нокталарында функция кыйммәтләрен табарга.

Мисал. $y = x\,ln^2 x$ функциясен экстремумга тикшерергә.

Чишү. 1) Функциянең чыгарылмасын табабыз: $y' = ln^2 x + x \cdot 2\,ln\,x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x\,(ln\,x + 2)$.

2) Чыгарылманы нульгә тигезләп, функциянең критик нокталарын табабыз: $x_1 = 1$; $x_2 = e^{-2}$. Чыгарылма $(-\infty; 0)$ интервалында билгеләнмәгән, шулай ук функция дә бу интервалда билгеләнмәгән булганга, $y = x\,ln^2 x$ функциясенең башка критик нокталары юк.

3) Һәр критик ноктадан сулда һәм уңда чыгарылма тамгасын табыйк (рәс.2.10):



Рәс.2.10

Димәк, функция $(0, e^{-2})$ һәм $(1; +\infty)$ интервалларында үсә һәм $(e^{-2}; 1)$ интервалында кими

Экстремум булуның җитәрлек шарты буенча, $x = e^{-2}$ - максимум ноктасы, $x = 1$ – минимум ноктасы.

4) Бу нокталарда функция кыйммәтен табабыз.

2.40 Функциянең кисемтәдәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләре

Гамәли (оптимизация) мәсьәләләренең иң мөһимнәреннән берсе – функциянең X аралыгындагы иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу.

Вейерштрасс теоремасы буенча, әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез икән, ул анда иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен ала.

Функциянең иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табу өчен:

1) $f'(x)$ чфгарылмасын табарга;

2) $f'(x) = 0$ булган яитсә чыгарылма булмаган критик нокталарны табарга;

3) функция кыйммәтләрен критик нокталарда һәм кисемтә очларында исәпләргә һәм алардан иң зур $f_{\text{иң зур}}$ һәм иң кечкенә $f_{\text{иң кечкенә}}$ кыйммәтләрне сайлап алырга.

Мисал. $y = \frac{2x-1}{2+x^2}$ функциясенең $[-2; 0]$ кисемтәсендәге иң зур һәм иң кечкенә кыйммәтләрен табарга.

Чишү 1) $f'(x) = \frac{2(2+x^2)-2x(2x-1)}{(2+x^2)^2} = \frac{-2(x^2-x-2)}{(2+x^2)^2}$.

2) $f'(x) = 0$, биредән критик нокталар $x_1 = 2, x_2 = -1$.

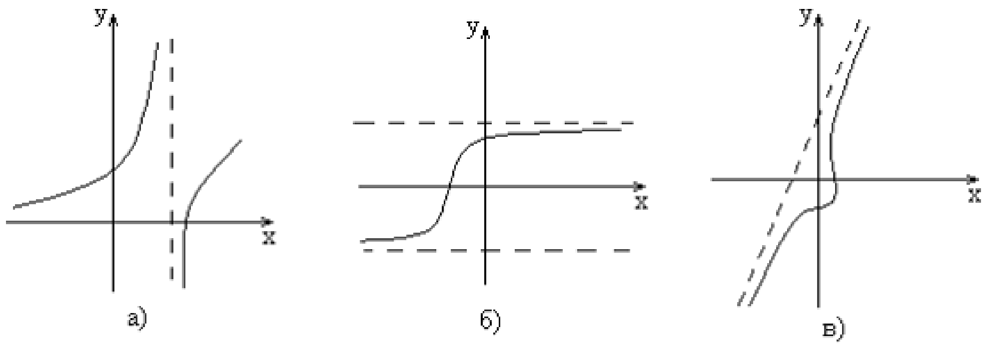
3) Функциянең критик нокталардагы кыйммәтләре $x_2 = -1$ $f(-1) = -1$ һәм кисемтә очларында $f(-2) = -\frac{5}{6}$ и $f(0) = -\frac{1}{2}$. $x = 2$ ноктасын карамыйбыз, чөнки ул $[-2; 0]$ кисемтәсенә керми.

Шулай итеп, , $f_{\text{иң зур}} = f(0) = -\frac{1}{2}, f_{\text{иң кечкенә}} = f(-1) = -1$.

Функция графигы асимптоталары. Функцияне тикшерү һәм аның графигын төзү

Билгеләмә. $y = f(x)$ функциясенең асимптотасы (асимптота турысы) дип график ноктасы координатлар башыннан чиксез ерагайган вакытта $(x, f(x))$ ноктасыннан турыга кадәр ара чиксез кимегән – нульгә омтылган туры атала.

Вертикаль (а); горизонталь (б); авыш (в) асимптоталар була (рәс.2.11 а,б,в).



Рәс.2.11

Теорема. Вертикаль асимптоталар нокталарында (мәсәлән, $x = x_0$) $y = f(x)$ функциясе өзелә, аның x_0 ноктасыннан сулда да, уңда да чикләмәләре $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ һәм (яки) } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty.$$

Теорема. $y = f(x)$ функциясе җитәрлек дәрәҗәдә зур x лар өчен билгеләнгән һәм

$$\lim_{x \to \infty} [f(x)/x] = k \quad \text{һәм} \quad \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$$

чикле чикләмәләре булсыннар. Ул вакытта $y = kx + b$ турысы $y = f(x)$ функциясе графигының авыш асимптотасы булып тора.

Теорема. $y = f(x)$ функциясе җитәрлек дәрәҗәдә зур x лар өчен билгеләнгән һәм $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ чикләмәсе булсын. Ул вакытта $y = b$ турысы $y = f(x)$ функциясенең горизонталь асимптотасы.

Горизонталь асимптота авыш асимптотаның $k = 0$ булгандагы аерым очрагы булып тора.

Мисал. $y = \frac{2x^2-1}{x}$ функциясе графигының асимптоталарын табарга.

Чишү. $x = 0$ ноктасында функция билгеләнмәгән, $x = 0$ ноктасыннан сулда һәм уңда функциянең чикләмәләрен табабыз:

$\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{2x^2-1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{2x^2-1}{x} = -\infty$.

Димәк, $x = 0$ – вертикаль асимптота.

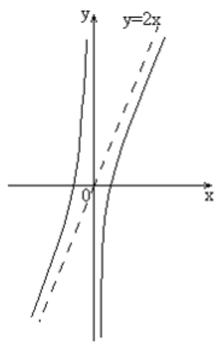
Авыш асимптотаны табыйк:

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) = 2$;

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 1 - 2x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Шулай итеп, $y = 2x$ – авыш асимптота (рәс.2.12).



Рәс.2.12

2.41 Функция тикшерү һәм график төзүнең гомуми схемасы

1) Функциянең билгеләнү өлкәсен табарга.

2) Функцияне җөплек-таклыкка, периодиклыкка тикшерергә.

3) Вертикаль асимптоталарны табарга.

4) Функциянең чиксезлектәге тәртибен тикшерергә; горизонталь яисә авыш асимптоталарны табарга.

5) Функциянең экстремумнарын һәм монотонлык интервалларын табарга.

6) Координатлар күчәрләре белән кисешү нокталарын һәм, бәлки, графикны аныклаучы тагын ниндидер нокталарны табарга.

Функция тикшерү аның гафигын төзү белән бер үк вакытта бара.

Мисал. $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ функциясен тикшерергә һәм аның графигын төзергә.

Чишү.

1) Билгеләнү өлкәсе $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Гомуми рәвешле функция, чөнки $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$.

3) $x = 1$ ноктасында функция өзелә, чикләмәләрен табыйк:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-2x+2}{x-1} = +\infty.$$

Димәк, $x = 1$ турысы – вертикаль асимптота.

4) Авыш асимптотаны табыйк:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k\text{x}) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x+2}{x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = -1.$$

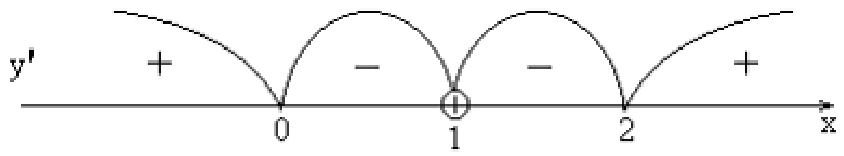
Шулай итеп, $y = x - 1$ турысы – авыш асимптота.

5) $y' = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$;

$y' = 0 \qquad x^2 - 2x = 0, x_1 = 0, x_2 = 2.$

$x = 1$ булганда y' билгеләнмәгән. $x_1 = 0$ һәм $x_2 = 2$ нокталары гына критик нокталар, чөнки $x = 1$ функциянең билгеләнү өлкәсенә керми.

Критик нокталар янында чыгарылма тамгаларын табыйк (рәс.2.13).



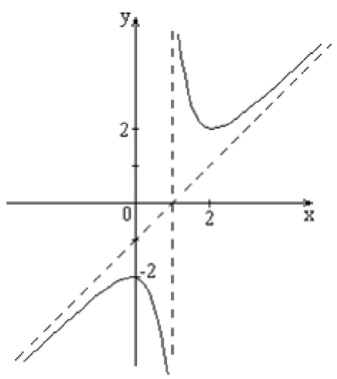
Рәс.2.13

$(-\infty; 0)$ һәм $(2; +\infty)$ интервалларында функция үсә, $(0; 1)$ һәм $(1; 2)$ интервалларында функция кими, шуңа $x = 0$ - максимум ноктасы, ә $x = 2$ – минимум ноктасы.

6) Күчәрләр белән кисешү нокталары

Ox: $y = 0$ чишелеше юк, шуңа функция графигы Ox күчәрен кисми.

Oy: $x = 0, y = -2$, ягъни $(0; -2)$ ноктасы Oy күчәре белән кисешү ноктасы (рәс.2.14).



Рәс.2.14

2.42 Функция дифференциалы

Дифференциал төшенчәсе һәм аның геометрик мәгънәсе

$y = f(x)$ функциясе X аралыгында билгеләнгән һәм $x \in X$ ноктасы тирәлегендә дифференциалланучы булсын. Ул вакытта $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ яки чиксез кечкенәләрнең функцияләр чикләмәләре белән бәйләнеше турындагы теорема буенча $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x)$, биредә $\alpha(x)$ - $\Delta x \to 0$ вакытта чиксез кечкенә зурлык. Ул вакытта

$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\, \Delta x.$

Шулай итеп, функция үсемтәсе Δy ике кушылучыдан тора:

1) Δx ка карата сызыкча булган $f'(x)\Delta x$, чөнки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$;

2) Δx ка карата сызыкча булмаган $\alpha(x)$, чөнки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0$.

Билгеләмә. Функция дифференциалы дип функция үсемтәсенең төп, Δx ка карата сызыкча булган өлеше атала:

$dy = f'(x)\Delta x$.

Мисал. $y = 2x^2 - 3x$ функциясенең $x = 10$ һәм $\Delta x = 0{,}1$ булганда үсемтәсен табарга.

Чишү. $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (2x^2 - 3x) = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x = \Delta x(4x + 2\Delta x - 3)$,

$$\Delta y = 0{,}1(4 \cdot 10 + 2 \cdot 0{,}1 - 3) = 3{,}72$$

Мисал. $y = x$ функциясе дифференциалын табарга.

Чишү. Билгеләмә буенча, $dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$.

Билгеләмә. Бәйсез x үзгәрешлесе дифференциалы бу үзгәрешленең үсемтәсенә тигез:

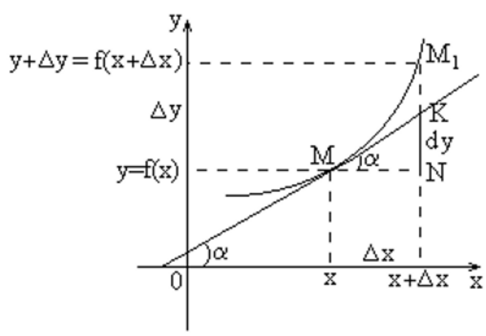
$$dx = \Delta x$$

Ул вакытта функция дифференциалы өчен формуланы болай язып була:

$$dy = f'(x)dx$$

Биредән $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, шуңа $\frac{dy}{dx}$ ны чыгарылманың символик тамгасы дип кенә түгел, ә санаучысы dy һәм ваклаучысы dx булган гадәти вакланма кебек карап була.

Геометрик мәгънәсе (рәс.2.15).



Рәс.2.16

$y = f(x)$ функциясе графигында ирекле $M(x, y)$ ноктасы алыйк. x аргументына Δx үсемтәсе бирик, ул вакытта функция $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ үсемтәсе алачак. M ноктасында Ox күчәре белән α почмагы хасил итүче орынма үткәрик. MM_1Nөчпочмагыннан: $\Delta y = KM_1 + NK$. ΔMKN өчпочмагыннан: $KN = MN \cdot tg\alpha = f'(x) \cdot \Delta x$. Шулай итеп, $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + KM_1$ һәм бу билгеләмәгә туры килә. Димәк, геометрик яктан функция дифференциалы $y = f(x)$ функциясе графигына үткәрелгән орынма ординатасының бу ноктаның x ы Δx үсемтәсе алганда алган үсемтәсенә тигез.

Дифференциал үзлекләре чыгарылманың үзлекләренә аналогик.

1) $dc = 0$

2) $d(cu) = cdu$

3) $d(u \pm v) = du \pm dv$

4) $d(uv) = vdu + udv$

5) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

2.43. Дифференциал форма инвариантлыгы

Әгәр $y = f(x)$ икән, $dy = f'(x)dx$.

Катлаулы функция карыйк. $y = f(u) = f[\phi(x)]$, биредә $u = \phi(x)$.

Әгәр $y = f(u)$ һәм $u = \phi(x)$ функцияләре үзләренең аргументларының дифференциалланучы функцияләре икән, катлаулы функция чыгарылмасы $y'_x = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'_u(u) \cdot u'_x(x)$.

Тигезлекнең ике ягын да dx ка тапкырлыйк: $y'_x dx = f'_u(u) \cdot u'_x(x)dx$. Шулай итеп,

$$dy = f'_u(u)du.$$

Бу тигезлек дифференциал формуласының бәйсез x үзгәрешлесеннән функция карау урынына бәйле u үзгәрешлесеннән функция караганда үзгәрмәвен белдерә. Бу үзлек дифференциал формасының инвариантлыгы (үзгәрмәүчәнлеге) исемен алган.

2.44 Дифференциал ярдәмендә якынча исәпләүләр

Күргәнебезчә, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x$, ягъни $\Delta y = dy + \alpha(x)\Delta x$. Δx җитәрлек дәрәҗәдә кечкенә булганда, функция үсемтәсе Δy якынча аның дифференциалына тигез:

$\Delta y \approx dy$,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

Бу формула еш кына якынча исәпләүләрдә файдаланыла.

Мисал. $\sqrt[6]{72}$ не исәпләргә.

Чишү. $f(x) = \sqrt[6]{x}$ булсын. $f'(x) = \frac{1}{6x^{5/6}}$. $x = 64, \Delta x = 8$ дип алыйк. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. $f(x) = \sqrt[6]{x}$ өчен

$\sqrt[6]{x+\Delta x} \approx \sqrt[6]{x} + \frac{1}{6x^{5/6}} \cdot \Delta x.$

$$\sqrt[6]{72} \approx \sqrt[6]{64} + \frac{1}{6 \cdot 64^{5/6}} \cdot 8 = 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3} \approx 2{,}0417$$

2.45 Берничә үзгәрешле функцияләре

Төп төшенчәләр. Аерым чыгарылмалар.

Билгеләмә. n үзгәрешле зурлык булсын һәм аларның ниндидер D күплегеннән кыйммәтләренең һәр $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ җыелмасына E күплегеннән билгеле бер Z үзгәрешле зурлыгы тиңдәш булсын. Ул вакытта берничә үзгәрешле функциясе $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ бирелгән диләр.

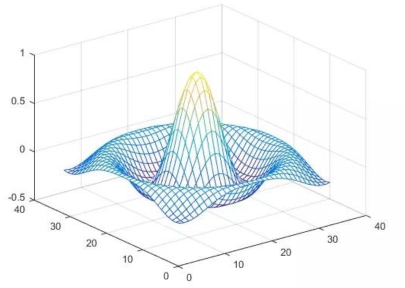
$x_1, x_2, \dots, x_n$ үзгәрешлеләре бәйсез үзгәрешлеләр, яки аргументлар дип атала.

Z – бәйле үзгәрешле

D күплеге функциянең билгеләнү өлкәсе, E күплеге функциянең кыйммәтләр өлкәсе дип атала.

Кыскалык өчен ике үзгәрешлеле функцияләрне генә карарбыз.

Ике үзгәрешлеле функцияне $z = f(x, y)$ дип тамгаларбыз (рәс.2.17).



Рәс.2.17

Билгеләмә. Ике үзгәрешлеле $z = f(x,y)$ функциясенең графигы дип өч үзгәрешлеле пространствоның (z,y,x) нокталар күплеге атала, биредә z апликатасы x абсциссасы һәм y ординатасы белән $z = f(x,y)$ функциональ нисбәте белән бәйләнгән. График өч үлчәмле пространствода ниндидер өслекне тәшкил итә.

2.46 Ике үзгәрешлеле функциянең аерым чыгарылмалары

Билгеләмә. Әгәр теләсә нинди $\varepsilon > 0$ һәм (x_0, y_0) ноктасыннан $\rho < \delta$ ераклыктагы (x,y) нокталары өчен $|f(x,y) - A)| < \varepsilon$ булырлык $\delta > 0$ саны бар икән, A саны $z = f(x,y)$ ике үзгәрешлеле функциясенең (x_0, y_0) ноктасындагы чикләмәсе дип атала. Тамгаланышы: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$.

$z = f(x,y)$ функциясен бер генә үзгәрешле, мәсәлән, x кына үзгәргән вакытта карыйк. Бу вакытта икенче үзгәрешле y фиксацияләнгән дип санала.

$f(x + \Delta x, y) - f(x,y) = \Delta_x z$ - *z функциясенең x үзгәрешлесе буенча аерым үсемтәсе*

$f(x, y + \Delta y) - f(x,y) = \Delta_y z$ - *z функциясенең y үзгәрешлесе буенча аерым үсемтәсе*

Билгеләмә. Ике үзгәрешлеле функциянең бу үзгәрешлеләрнең берсе буенча аерым чыгарылмасы дип функциянең тиешле аерым үсемтәсенең каралучы бәйсез үзгәрешле үсемтәсенә, соңгысы нульгә омтылгандагы чикләмәсе атала. $z = f(x,y)$ булсын. ул вакытта

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Искәрмә. Ике үзгәрешле функциянең аерым чыгарылмасы икенче үзгәрешле даими булганда бер үзгәрешле буенча чыгарылма булганга, аерым чыгарылмаларны бер үзгәрешле функциясен дифференциаллау формулалары буенча исәплиләр.

Мисал. а) $z = x^3 y^3$, б)$z = x^y$ функцияләренең аерым чыгарылмаларын табарга.

Чишү. а) $z'_x = (x^2 y^3)'_x = y^3 2x$, $z'_y = (x^2 y^3)'_y = x^2 3y^2$.

б) $z'_x = (x^y)'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = (x^y)'_y = x^y \ln x$.

Кагыйдә. $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ чыгарылмасы y ның фиксацияләнгән кыйммәте, ә $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$ чыгарылмасы x ның фиксацияләнгән кыйммәте вакытында исәпләнә.

Билгеләмә. $z = f(x, y)$ функциясенең шулай ук ике x һәм y үзгәрешлеләре функцияләре булып торган аерым z'_x һәм z'_y чыгарылмалары булсын. Бу функцияләрдән аерым чыгарылмалар $f(x, y)$ функциясенең икенче тәртип аерым чыгарылмалары дип атала. Һәр беренче тәртип чыгарылмасының ике аерым чыгарылмасы бар. Шулай итеп, барысы 4 икенче тәртип аерым чыгарылмалары табыла, аларны болай тамгалыйлар:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Билгеләмә. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ һәм $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ $z = f(x, y)$ функциясенең катнаш чыгарылмалары дип аталалар.

2.47 Ике үзгәрешле функция экстремумы

Билгеләмә. $z = f(x, y)$ функциясе бирелгән. Әгәр $M(x_0, y_0)$ ноктасының аның барлык (x, y) нокталары өчен

$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$,

$$[f(x_0, y_0) \leq f(x, y)]$$

тигезсезлеге үтәлерлек тирәлеге бар икән, бу M ноктасы функциянең максимум (минимум) ноктасы дип атала.

Теорема (экстремумның кирәкле шарты). $(x_0 y_0)$ ноктасы $z = f(x, y)$ дифференциалланучы функциясенең экстремум ноктасы булсын. Ул вакытта $f'_x(x_0, y_0)$ һәм $f'_y(x_0, y_0)$ аерым чыгарылмалары бу ноктада нульгә тигез.

Теорема (экстремумның җитәрлек шарты). $z = f(x, y)$ функциясе:

а) ниндидер критик (x_0, y_0) ноктасының ниндидер тирәлегендә билгеләнгән, анда $f'_x(x_0, y_0) = 0$ һәм $f'_y(x_0, y_0) = 0$ булсын,

б) бу ноктада өзлексез икенче тәртип аерым чыгарылмаларына ия булсын һәм

$f''_{xx}(x_0, y_0) = A$,

$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) = B$,

$f''_{yy}(x_0, y_0) = C$.

Ул вакытта, әгәр $\Delta = AC - B^2 > 0$ икән, (x_0, y_0) ноктасында $z = f(x, y)$ функциясенең экстремумы бар, өстәвенә, әгәр $A < 0$ (яки $C < 0$) икән, максимум, әгәр $A > 0$ (яки $C > 0$) икән, минимум. Башка очракта функциянең экстремумы юк.

Әгәр $\Delta = AC - B^2 = 0$ икән, экстремум барлыгы турында сорау ачык кала.

Ике үзгәрешле функцияне экстремумга тикшерү схемасы

1) z'_x һәм z'_y аерым чыгарылмаларын табарга.

2) $z'_x = 0$ һәм $z'_y = 0$ тигезләмәләрен чишеп функциянең критик нокталарын табарга

3) Икенче тәртип аерым чыгарылмаларны табарга, аларның кыйммәтләрен һәр критик ноктада исәпләргә һәм җитәрлек шарт ярдәмендә экстремумнар барлыгы турында нәтиҗә ясарга

4) Функция экстремумнарын (экстремаль кыйммәтләрен) табарга.

Мисал. $z = (y - x)^2 + (y + 2)^2$ функциясен экстремумга тикшерергә.

Чишү. 1) Аерым чыгарылмаларны табабыз:

$z'_x = -2(y - x), z'_y = 2(y - x) + 2(y + 2) = 4y - 2x + 4.$

2) Функциянең критик нокталарын тигезләмәләр системасыннан табабыз:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2(y - x) = 0, \\ 4y - 2x + 4 = 0. \end{cases}$$

Системаны чишеп, бер критик нокта табабыз: $(-2; -2)$

3) Икенче тәртип аерым чыгарылмаларны табабыз:

$A = z''_{xx} = 2, B = z''_{xy} = -2, C = z''_{yy} = 4.$

$\Delta = AC - B^2 = 8 - 4 = 4.$

$\Delta > 0$ һәм $A > 0$ булганга, $(-2; -2)$ минимум ноктасы була.

3. ИНТЕГРАЛ

3.1 Башлангыч функция төшенчәсе һәм аныксыз интеграл

Билгеләмә. Әгәр X аралыгының һәр ноктасында $F'(x) = f(x)$ икән, $F(x)$ функциясе $f(x)$ функциясе өчен башлангыч функция дип атала.

Мисал. $F(x) = x^2$ функциясе $f(x) = 2x$ өчен башлангыч функция була, чөнки $F'(x) = (x^2)' = 2x$.

Әгәр $f(x)$ өчен $F(x)$ башлангычы бар икән, аның бердәнбер түгел икәнен искәртеп була. Әле генә каралган мисалга кайтсак, $x^2 - 1$, $x^2 + 7$ һәм гомумән $x^2 + C$ (C – ниндидер сан) функцияләренең $f(x) = 2x$ өчен башлангыч функция икәне күренә. Шулай итеп, мондый теорема дөрес:

Теорема. Һәр өзлексез функция чиксез сандагы башлангыч функциягә ия, өстәвенә аларның теләсә кайсы бер-берсеннән даими кушылучыга гына аерыла.

Билгеләмә. $f(x)$ функциясенең X аралыгындагы барлык башлангычлары җыелмасы $f(x)$ функциясеннән аныксыз интеграл дип атала һәм $\int f(x)\, dx$ дип тамгалана, биредә $\int$ - интеграл тамгасы, $f(x)$ - интеграл асты функциясе, $f(x)dx$ – интеграл асты аңлатмасы. Шулай итеп,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

биредә $F(x)$ - $f(x)$ өчен ниндидер башлангыч функция, C – ирекле константа.

Билгеләмә. Аныксыз интегралны табу гамәле бу функцияне интеграллау дип атала.

3.2. Аныксыз интеграл үзлекләре

1) Аныксыз интегралдан чыгарылма интеграласты функциясенә тигез, ягъни

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

2) Аныксыз интеграл дифференциалы интеграласты аңлатмасына тигез, ягъни

$d[\int f(x)dx]\ ' = f(x)dx.$

3) Ниндидер функция дифференциалыннан аныксыз интеграл даими кушылучыга кадәр төгәллек белән бу функциягә тигез, ягъни

$\int dF(x) = F(x) + C.$

Даими тапкырлаучыны интеграл тышына чыгарырга мөмкин, ягъни

$\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx.$

Ике функциянең алгебраиик суммасыннан интеграл бу функцияләрнең интеграллары суммасына тигез, ягъни

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\, dx$$

Кайбер таблица интеграллары

$\int 0dx = C, \int dx = x + C, \int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C, x \neq 0,$$

$\int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + C, \int cos\, x\, dx = sin\, x + C,$

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a \neq 0,$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C, a \neq 0$

$$\int a^x dx = \frac{1}{ln\, a} a^x + C, a > 0, a \neq 1,$$

$\int e^x\, dx = e^x + C,$

$\int \frac{dx}{cos^2\, x} = tgx + C, \int \frac{dx}{sin^2\, x} = -ctgx + C.$

$\int \frac{2^x - 5^x}{10^x} dx$ интегралын исәпләргә

Чишү.

$\int \frac{dx}{25x^2-1}$ интегралын исәпләргә.

Чишү.

$\int \frac{dx}{25x^2-1} = \int \frac{1}{25}\left(\frac{dx}{x^2-(1/5)^2}\right) = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{2/5} ln\left|\frac{x-1/5}{x+1/5}\right| + C = 0{,}1 \cdot ln\left|\frac{x-0{,}2}{x+0{,}2}\right| + C.$

3.3. Интегралларны исәпләү методлары

1) Үзгәрешлене алыштыру методы (алыштырып кую методы)

Бирелгән интеграл $\int f(x)\,dx$ турыдан-туры таблица интегралына үзгәртелмәсен. Яңа t үзгәрешлесен кертәбез: $x = \phi(t)$. Ул вакытта $f(x) = f[\phi(t)]$, $dx = \phi'(t)dt$,

$\int f(x)dx = \int f[\phi(t)]\,\phi'(t)dt$.

Мисал. Исәпләргә: $\int \frac{xdx}{5x^2-1}$.

Чишү:

$$\int \frac{xdx}{5x^2-1} = \left|\begin{matrix}5x^2-1=t\\ 10xdx=dt\end{matrix}\right| = 0{,}1\int\frac{dt}{t} = 0{,}1\,ln|t| + C =$$

$=0{,}1\,ln|5x^2-1| + C$.

Теорема. $F(x)$ функциясе $f(x)$ өчен ниндидер башлангыч функция булсын. Ул вакытта, әгәр интеграласты функциясе $f(x)$ һәм башлангыч функция $F(x)$ ның аргументы x урынына $(kx+b)$ аңлатмасы куйсак, бу башлангыч функция алдында $\frac{1}{k}$ тапкырлаучысы пәйда булуга китерәчәк:

$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$, биредә k һәм b – ниндидер саннар, $k \neq 0$.

Мисал. $\int \frac{dx}{cos^2(3x-5)}$ исәпләргә.

Чишү. $\int \frac{dx}{cos^2(3x-5)} = \left\{\int\frac{dx}{cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}tg(kx+b) + C\right\} = \frac{1}{3}tg(3x-5) + C$.

2) Өлешләп интеграллау методы

$u = u(x)$ һәм $v = v(x)$ - дифференциалланучы функцияләр булсын. Ул вакытта $d(uv) = vdu + udv$. Сул һәм уң ягын интеграллап, табабыз:

$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, или

$\int udv = uv - \int vdu$.

Табылган формула аныксыз интеграл өчен өлешләп интеграллау формуласы дип атала.

Мисал. . $\int xe^{-3x}dx =$
$\left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-3x}dx & v = \int dv = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C \quad (C = 0) \end{matrix} \right| =$

$=-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x} + C =$

$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + C.$

Мисал. $\int(4x^3 + 1)\ln x\,dx$ исәпләргә.

Чишү.

$$\int(4x^3 + 1)\ln x\,dx$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = (4x^3 + 1)dx & v = \int(4x^3 + 1)dx = x^4 + x + C \quad (C = 0) \end{matrix} \right| =$$

$= (x^4 + x)\ln x - \int\frac{x^4+x}{x}dx = (x^4 + x)\ln x - \int(x^3 + 1)dx = (x^4 + x)\ln x - \frac{x^4}{4} - x + C.$

Өлешләп интеграллау юлы белән исәпләнүче интегралларның кайбер типлары

$\int P(x)\sin\alpha x dx$, яки $\int P(x)\cos\alpha x dx$

биредә $P(x)$ - күпбуын

$\left| \begin{matrix} u = P(x) \\ dv = \sin\alpha x dx \text{ яки } dv = \cos\alpha x dx \end{matrix} \right|$ дип алабыз

$\int P(x)\,a^{\alpha x}dx$ яки $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$

$\left| \begin{matrix} u = P(x) \\ dv = a^{\alpha x}dx \text{ яки } dv = e^{\alpha x}dx \end{matrix} \right|$ дип алабыз

$\int P(x)\ln x\,dx$ ул вакытта

$\left| \begin{matrix} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{matrix} \right|$ дип алабыз

3.4. Рациональ вакланмаларны интеграллау

Билгеләмә. n нчы дәрәҗәле күпбуын (полином) дип

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ рәвешле аңлатма атала, биредә $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - реаль саннар, $a_n \neq 0, n \geq 0$.

Билгеләмә. Рациональ вакланма дип ике күпбуын чагыштырмасы $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ атала, биредә n һәм m күпбуын дәрәҗәсен күрсәтә. Әгәр $n < m$ икән, вакланма ялгыз, $n \geq m$ булса, катнаш була. Катнаш вакланмадан ялгыз вакланмага күчү өчен вакланманы почмаклап бүлеп аның бөтен өлешен аерып алырга кирәк.

Мисал. $\frac{x^3-3x+4}{x-2}$ катнаш рациональ вакланманың бөтен өлешен аерып алырга.

Чишү. Санаучыны ваклаучыга почмаклап бүлик

Шулай итеп, $\frac{x^3-3x+4}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{6}{x-2}$.

Билгеләмә. Түбәндәге типларның берсенә китерелә ала торган вакланма иң гади рациональ вакланма дип атала.

I) $\frac{A}{(kx-a)^n}$

II) $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, биредә A, B, C - константалар; n - натураль сан; $x^2 + px + q$ – күпбуынының реаль тамырлары юк.

Бу интегралларны исәпләү юлларын карыйк:

I) $\int \frac{A}{(kx-a)^n} dx$ Үзгәрешлене алыштырабыз. $x - a = t$ һәм килеп чыккан таблица интегралын исәплибез.

II) $n = 1$ очрагын карыйк. Интеграл асты функциясендә тулы квадратны бүлеп чыгарабыз һәм тиешле үзгәрешлене алыштыру башкарабыз.

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Bx+C}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q} dx = \begin{Bmatrix} \text{үзгәрешлене алыштыру} \\ \left(x + \frac{p}{2} = t\right) \end{Bmatrix}$$

Мисал. $\int \frac{dx}{(3x-4)^5}$ исәпләргә.

Чишү. $\int \frac{dx}{(3x-4)^5} = \begin{vmatrix} 3x - 4 = t \\ 3dx = dt \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{4t^4} + C = -\frac{1}{12(3x-4)^4} + C$

Мисал. $\int \frac{x-4}{x^2-2x-3} dx$ исәпләргә.

Чишү.

$$\int \frac{x-4}{x^2-2x-3}dx$$

$$= \int \frac{x-4}{(x-1)^2-4}dx = \begin{vmatrix} x-1=t \\ dx=dt \end{vmatrix}$$

$$= \int \frac{t+1-4}{t^2-4}dt = \int \frac{t}{t^2-4}dt - 3\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= \int \frac{t}{t^2-4}dt - \frac{3}{2\cdot 2}ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \int \frac{t}{t^2-4}dt - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$$

$$= \begin{vmatrix} t^2-4=y \\ 2tdt=dy \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|y| - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C = \frac{1}{2}ln|t^2-4| - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}ln|(x-1)^2-4| - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}ln|x^2-2x-3| - \frac{3}{4}ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right| + C.$$

3.5 Иррациональ аңлатмаларны интеграллау

Рациональ аңлатма ул $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_0}$ рәвешле аңлатма

$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)d\,x.$ Алыштыру: $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t,$ $x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a},$ $d\,x = \frac{t^{n-1}\cdot n(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}d\,t,$ $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ac+b}{cx+d}}\right)d\,x = = R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a}, t\right)\cdot\frac{nt^{n-1}\cdot(ad-bc)}{(ct^n-a)^2}.$

Биномиаль дифференциаллар.

$\int x^m(a+bx^n)^p\,d\,x$, биредә n, m и p – рациональ саннар.

1. Әгәр p – бөтен икән, $m = \frac{s_1}{q_1}$, ә $n = \frac{s_2}{q_2}$ булсын, биредә s_i һәм q_i – бөтен саннар һәм $\nu = \text{ИКУК}(q_1, q_2)$ и $x = t^\nu$. Ул вакытта $x^m = x^{\frac{s_1}{q_1}} = t^{\frac{\nu s_1}{q_1}}$, $x^n = t^{\frac{\nu s_2}{q_2}}$, $d\,x = \nu t^{\nu-1}\,d\,t$ һәм $\int x^m(a+bx^n)^p\,d\,x = \int t^{\frac{\nu s_1}{q_1}}\left(a+bt^{\frac{\nu s_2}{q_2}}\right)^p\cdot\nu t^{\nu-1}\,d\,t.$

2. Әгәр p – бөтен түгел, ә $\frac{m+1}{n}$ – бөтен икән, $x^n = t, x = t^{\frac{1}{n}}, d\,x = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,d\,t$, $\int x^m (a+bx^n)^p\,d\,x = \int t^{\frac{\nu s_1}{q_1}} \left(a + bt^{\frac{1}{n}}\right)^p d\,t =$ $\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}\left(1+bt^{\frac{1}{n}}\right)^p d\,t =$ $\frac{1}{n}\int R\left(x, \sqrt[\nu]{a+bt}\right) d\,t$, биредә $\nu = \frac{\mu}{p}$ – бөтен сан. Моннан соң $z = \sqrt[\nu]{a+t} =$ $\sqrt[\nu]{a+bx^n}$

3. Әгәр p – бөтен түгел һәм $\frac{m+1}{n}$ – бөтен түгел, ә $\frac{m+1}{n} + p$ – бөтен икән, ул вакытта барысы да әле генә эшләгән кебек, ләкин соңгы алыштыру $z = \sqrt[\nu]{\frac{a+bt}{t}} = \sqrt[\nu]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$.

Эйлер алыштырулары.

$\int P\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) d\,x$, биредә $a \neq 0$.

1. Әгәр $a > 0$ икән, $t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$. Ул вакытта $x = \frac{t^2-c}{b \pm 2t\sqrt{a}}$, $d\,x = \frac{\pm 2t^2\sqrt{a} + 2bt \pm 2c\sqrt{a}}{\left(b \pm 2\sqrt{a}\right)^2} d\,t$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = = t \mp \frac{(t^2-c)\sqrt{a}}{b\pm 2t\sqrt{a}} = \pm \frac{t^2\sqrt{a}+bt\pm c\sqrt{a}}{b \pm 2t\sqrt{a}}$, $d\,x$ белән кыскара.

2. Әгәр $c > 0$ булса, $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$. Ул вакытта $x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}$, $d\,x = \frac{\pm 2t^2\sqrt{c} - 2bt \pm 2a\sqrt{c}}{(t^2-a)^2} d\,t$.

3. Әгәр $ax^2+bx+c = 0$ тигезләмәсе тамырлары – реаль саннар икән, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$, биредә x_1 – тамырларның берсе. Ул вакытта $x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}$.

3.6 Тригонометрик интеграллар

Универсаль алыштыру $\int R(\sin x, \cos x)\,d\,x$: $t = tg\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x = 2\,arctg\,t$, $d\,x = \frac{2\,d\,t}{1+t^2}$.

3.7. “Исәпләнелмәүче” интеграллар

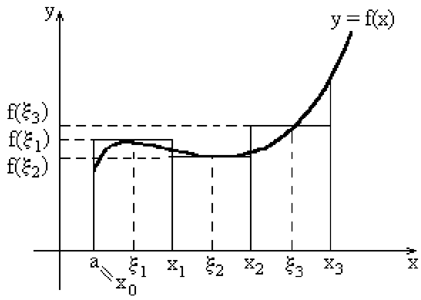
Кайбер элементар функцияләрдән интеграллар исәпләнелми, ягъни аларның элементар башлангычлары юк. Мәсәлән:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \int sin\,x^2\,dx, \int cos\,x^2\,dx, \int \frac{sin\,x}{x}dx, \int \frac{cos\,x}{x}dx, \int \frac{dx}{ln\,x} \text{ һ.б.}$$

Ләкин әле бу интегралларның булмавын һәм аларны табарга мөмкин түгеллеген аңлатмый. Гадәттә аларны махсус функцияләр аша исәплиләр.

3.8. Анык интеграл

Анык интеграл билгеләмәсе. Үзлекләр (рәс.3.1).



Рәс.3.1

$[a,b]$ кисемтәсендә $y=f(x)$ функциясе бирелгән булсын. $[a,b]$ кисемтәсен $x_0,x_1,x_2,\dots,x_n$ нокталары белән n элементар кисемтәгә бүлик, биредә $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$. Һәр кисемтәдә ниндидер ξ_i ноктасын сайлыйк һәм $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ дип куйыйк, биредә $i=1,2,3,\dots,n$.

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ рәвешле сумманы $[a,b]$ кисемтәсендә $y=f(x)$ функциясе өчен интеграль сумма дип әйтербез.

l дип Δx_i кисемтәләренең иң озыны озынлыгын тамгаларбыз, ягъни $\lambda = \underset{i}{max}\Delta x_i$

Билгеләмә. $y=f(x)$ функциясеннән $[a,b]$ кисемтәсендә анык интеграл дип интеграль сумманың $\lambda\to 0$ булгандагы чикләмәсе атала, ягъни

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

a – аскы чик,

b – өске чик,

$f(x)$ - интеграласты функциясе,

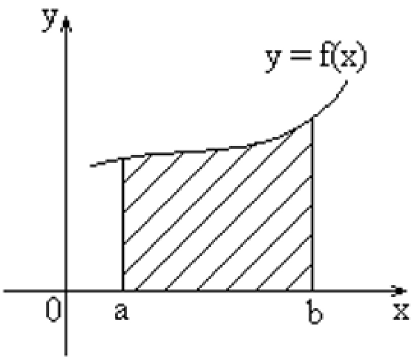
$f(x)dx$ – интеграласты аңлатмасы.

1 нче искәрмә. Интеграл астындагы үзгәрешлене теләсә нинди хәреф белән билгеләргә була:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz =$ һ.б.ш.

2 нче искәрмә. Функцияләр семьялыгы (башлангычлар) тәшкил иткән $\int f(x)\,dx$ аныксыз интегралыннан аермалы буларак, анык интеграл $\int_a^b f(x)dx$ билгеле бер сан.

3.9. Анык интегралның геометрик мәгънәсе



Рәс.3.2

$[a,b]$ кисемтәсендә тискәре булмаган $y = f(x)$ функциясе бирелгән булсын (рәс.3.2). Ул вакытта $y = f(x)$ кәкресе, $x = a, x = b$ турылары һәм $y = 0$ абсциссалар күчәре белән чикләнгән кәкре сызыклы трапеция мәйданы S $y = f(x)$ функциясеннән $[a,b]$ буенча алынган анык интегралга тигез.

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

3.10 Анык интеграл булуның җитәрлек шарты

Теорема .

Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a,b]$ кисемтәсендә өзлексез икән, ул бу кисемтәдә интегралланa.

Анык интеграл үзлекләре

1) Даими тапкырлаучыны интеграл тышына чыгарырга мөмкин: $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

2) Ике функциянең алгебраик суммасыннан интеграл бу функцияләрдән интеграллар суммасына тигез

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

3) интеграллау чикләренең урыннарын алыштырсак анык интеграл тамгасы капма-каршыга үзгәрә:

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

4) Әгәр интеграллау кисемтәсе өлешләргә бүленгән икән, барлык кисемтәдәге интеграл һәр өлешләрдән интеграллар суммасына тигез:

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

5) Әгәр $[a, b]$ кисемтәсендә $(a < b)$ $f(x) \leq g(x)$ икән,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

6) Урта кыйммәт турында теорема. Әгәр $y = f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез икән,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

булырлык $\xi \in [a, b]$ ноктасы табыла.

3.11. Өске чиге үзгәрешле булган анык интеграл

$f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез, ә $F(x)$ аның башлангыч функциясе булсын.

$\int_a^x f(t)dt$ анык интегралын карыйк, биредә x $\in [a, b]$. *x* үзгәргәндә анык интеграл да үзгәрә, ягъни ул интеграллауның өске чиге *x* функциясе булып тора. *Аны* $\Phi(x)$ дип тамгалыйк:

$$\Phi(\mathrm{x}) = \int_a^x f(t)dt$$

Билгеләмә. $\Phi(x)$ функциясе үзгәрешле өске чикле интеграл (ачык өске чикле интеграл) дип атала.

1 нче теорема. Әгәр $f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез икән, $\Phi(x)$ функциясе шулай ук $[a, b]$ да өзлексез.

2 нче теорема. $f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез булсын. Ул вакытта $[a, b]$ кисемтәсенең һәр ноктасында $\Phi(x)$ функциясенең үзгәрешле өске чик буенча чыгарылмасы интеграл асты функциясе $f(x)$ ның өске чиктәге кыйммәтенә тигез, ягъни

$\Phi'(x) = \left[\int_a^x f(t)dt\right]_x' = f(x).$

Ньютон-Лейбниц формуласы. Анык интеграл исәпләү методлары

Теорема. $f(x)$ функциясе $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез, ә $F(x)$ аның $[a, b]$ кисемтәсендәге теләсә кайсы башлангыч функциясе булсын. Ул вакытта . $f(x)$ функциясннән $[a, b]$ кисемтәсендә анык интеграл $F(x)$ башлангыч функциясенең бу кисемтәдәге үсемтәсенә тигез, ягъни

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Анык интегралны үзгәрешлене алыштыру юлы һәм өлешләп исәпләү

Теорема. $x = \phi(t)$ функциясенең $[\alpha, \beta]$ кисемтәсендә өзлексез чыгарылмасы булсын һәм $a = \phi(\alpha)$ һәм $b = \phi(\beta)$ үтәлсен , $f(x)$ $x = \phi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ рәвешле һәр x ноктасында өзлексез булсын. Ул вакытта

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$

Бу формула анык интегралда үзгәрешле алыштыру формуласы дип атала.

Мисал. $\int_0^1 x(5 - 2x^2)^3 dx$ исәпләргә.

Чишү. $t = 5 - 2x^2$, ул вакытта $dt = -4xdx$. $x = 0$ булганда $t = 5$, ә $x = 1$ булганда $t = 3$.

$\int_0^1 x(5 - 2x^2)^3 dx = \int_5^3 t^3 \left(\frac{-1}{4}\right) dt = \frac{1}{4}\int_3^5 t^3\, dt = \frac{1}{16} t^4|_3^5 = \frac{1}{16}(5^4 - 3^4) = \frac{1}{16}(625 - 81) = \frac{544}{16} = 34.$

Теорема. $u = u(x)$, $v = v(x)$ функцияләре $[a, b]$ кисемтәсендә өзлексез чыгарылмаларга ия булсын. Ул вакытта

$$\int_a^b udv = uv|_b^a - \int_a^b vdu$$

биредә $uv|_b^a = u(b)v(b) - u(a)v(a)$

Бу формула анык интеграл өчен өлешләп интеграллау формуласы дип атала.

Мисал. $\int_0^1 ln(1+x)\,dx$ исәпләргә.

Чишү. $u = ln(1+x)$, $dv = dx$ булсын.

Ул вакытта $du = \frac{1}{1+x}dx, v = \int dv = \int dx = x + C$ ($C = 0$ дип алыйк).

$$\int_0^1 ln(1+x)\,dx =$$

$$= x\,ln(1+x)|_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{xdx}{1+x} = \begin{vmatrix} t = 1+x \\ dt = dx \\ x = 0 \;\; t = 1 \\ x = 1 \;\; t = 2 \end{vmatrix}$$

$$= [ln(1+1) - 0 \cdot ln\,1] - \int_1^2 \frac{(t-1)dt}{t} =$$

$= ln\,2 - \left(\int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{t}\right) = ln\,2 - t|_1^2 + \ln\ |t||_0^1 = ln\,2 - (2-1) + ln\,2 - ln\,1 = 2\,ln\,2 - 1 = ln\,4 - 1.$

3.12 Интеграллауның чиксез чикләре булган үз булмаган интеграллар

Билгеләмә. Өзлексез $f(x)$ функциясеннән $[a, +\infty]$ ярым интервалында чиксез өске чикле үз булмаган интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дип $\int_a^t f(x)\,dx$ интегралының t $+\infty$ кә омтылгандагы чикләмәсе атала:

$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)d\,x.$

Әгәр бу чикләмә бар икән, үз булмаган интеграл җыелучан, булмаса таралучан дип атала.

Мисал. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ исәпләргә.

Чишү. Билгеләмә буенча,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1\right] = 1.$$

Димәк, үз булмаган интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ җыела һәм ул 1 гә тигез.

Аналогия буенча өзлексез функциядән чиксез аскы чикле үз булмаган интеграл кертелә, аерым алганда:

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Ике чиксез чикләмәле үз булмаган интеграл болай тамгалана:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$,биредә $a < c < b.$

Мисал. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\, dx$ исәпләргә.

Чишү.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx + \int_0^{+\infty} e^x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\, dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^x\, dx$$

$$= \lim_{a\to+\infty} e^x|_a^0 + \lim_{b\to-\infty} e^x|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (e^0 - e^a) + \lim_{b\to+\infty} (e^b - e^0) = 1 - 0 + \infty - 1 = \infty.$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\, dx$ интегралы тарала.

4. РӘТЛӘР

4.1 Санлы рәтләр

Билгеләмә. Чиксез саннар эзлеклелеге $U_1, U_2, \dots, U_n$ ... бирелгән булсын. Ул вакытта

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (1)$$

санлы рәт дип атала. Биредә U_n рәтнең гомуми буыны дип атала.

Мисаллар.

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$
2. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
3. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Билгеләмә. $S_1 = U_1, S_2 = U_1 + U_2, \dots., S_2 = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ рәвешле суммалар (1) рәтенең өлешчә суммалары дип атала.

Билгеләмә. Әгәр өлешчә суммалар $S_1, S_2, \dots, S_n$ эзлеклелегенең чикләмәсе бар икән, (1) рәте җыелучан рәт дип атала. Әгәр өлешчә суммалар эзлеклелегенең чикләмәсе юк икән, рәт тарала.

4.2. Уңай буынлы санлы рәт җыелуы билгеләре

Җыелуның кирәкле шарты. Әгәр (1) рәте җыела икән, $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$. Кире раслама дөрес түгел, ягъни бирелшгән шарт үтәлгәндә дә рәт җыелмаска мөмкин.

Җыелуның җитәрлек шартлары.

1. Чагыштыру билгесе. Уңай буынлы ике рәт булсын.

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \qquad (2)$$

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} V_n. \qquad (3)$$

$n \geq N$ булганда $U_n \leq V_n$ булырлык N натураль саны бар дип фараз итик. Ул вакытта (3) рәте җыелуыннан (2) рәте җыелуы чыга, ә (2) рәте таралуыннан (3) рәте таралуы чыга.

Коши радикаль билгесе: $a_n \geq 0, C_n = \sqrt[n]{a_n}$ булсын.

1. Әгәр $\forall n$, кайсыннандыр башлап, $C_n < 1$ икән, $\sum a_n$ җыела. Әгәр дә $\forall n$ өчен кайсыннандыр башлап $C_n \geq 1$ булса, $\sum a_n$ тарала.

2. Әгәр $\exists \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, ул вакытта $q < 1$ булганда $\sum a_n$ җыела, $q > 1$булганда $\sum a_n$ тарала.

1. $\sum a_n$ рәтен $\sum q^n$ рәте белән $C_n \leq q < 1$ өчен һәм $\sum 1$ белән $C_n \geq 1$ өчен чагыштырыйк. Ул вакытта беренче очракта $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ булганга, $a_n \leq q^n$ һәм $0 \leq q < 1$ булганга $\sum q^n$ җыела $\Rightarrow \sum a_n$ җыела. Икенче очракта кайсыдыр n нан башлап $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$. $\sum 1$ тарала $\Rightarrow \sum a_n$ тарала.

2. Хәзер исә $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ булсын. Әгәр $q < 1$ икән, мондый q' табыла: $q < q' < 1$ һәм кайсыдырыннан башлап, $\forall n$, өчен $\sqrt[n]{a_n} < q' < 1$ булачак. Биредән $\sum a_n$ җыелуы чыга.

2. Даламбер билгесе.

Буыннары уңай булган $U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$ рәте бирелгән һәм $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho$ чикләнгән булсын. Ул вакытта $\rho < 1$ булганда рәт җыела, ә $\rho < 1$ булса рәт тарала. $\rho = 1$ булганда сорау ачык кала.

4.3. Тамгаалышмалы рәтләр

Буыннар уңай да, тискәре дә булырга мөмкин булган рәтләр тамга үзгәрешле рәтләр дип атала.

Тамгаалышмалы рәт дип

$$U_1 - U_2 + \cdots + (-1)^{n-1} U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n$$

рәвешле рәт атала, биредә $U_n > 0$ $(n = 1,2, \ldots)$.

$$-U_1 + U_2 - \cdots + (-1)^n U_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n$$

рәвешле рәтләр шулай ук тамгаалышмалы рәтләр дип атала.

Абсолют җыелу билгесе.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n U_n = -U_1 + U_2 - \cdots + (-1)^n U_n + \cdots \qquad (4)$$

рәте

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = U_1 + U_2 - \cdots + U_n + \cdots \qquad (5)$$

рәте җыелганда җыела. Бу очракта (4) рәте абсолют җыелучан дип атала. Әгәр (4) рәте җыела, ә (5) рәте тарала икән, (4) рәте шартлы җыелучан рәт дип атала. Бу вакытта (4) рәтенең җыелучанлыгын күп очракларда (5) рәтен тикшермичә дә башкарып була.

Җыелучанлыкның Лейбниц билгесе.

Тамгаалышмалы рәт бирелгән булсын.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = U_1 - U_2 + \cdots + (-1)^{n-1} U_n + \cdots (n = 1,2, \dots)$$

дә түбәндәге шартлар:

1) $U_1 > U_2 > \cdots > U_n > \cdots$

2) $\lim_{n \to \infty} U_n = 0$

берьюлы үтәлә икән, андый рәт җыела һәм аның суммасы беренче буыннан зуррак түгел: $S \leq U_1$.

4.4. Дәрәҗәле рәтләр

Билгеләмә.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

дәрәҗәле рәт дип атала. Биредә $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ - рәт коэффициентлары, a_0 – иркле буын. Дәрәҗәле рәтләр

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_0(x) + U_1(x) + U_2(x) + \cdots + U_n(x) + \cdots \qquad (6)$$

рәвешле функциональ рәтләрнең бер төре булып тора. Теләсә нинди дәрәҗәле рәтнең $x = 0$ өчен җыелуы ачык. Теләсә кайсы дәрәҗәле рәт өчен бу рәт һәр ноктасында җыела, ә интервал тышында тарала торган $(-R, R)$ интервалы бар, ул җыелучанлык интервалы дип атала. Интервал чикләрендә рәт я тарала, я җыела. R саны дәрәҗәле рәтнең җыелучанлык радиусы дип атала һәм ул мондый формула буенча табыла:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \qquad (7)$$

Шулай итеп, дәрәҗәле рәтнең җыелучанлык өлкәсен табу аның җыелучанлык радиусы R ны табуга һәм рәт җыелучанлыгын җыелучанлык интервалы чикләрендә тикшерүгә кайтып кала (ягъни, $x = \pm R$ булганда).

Мәсьәлә. Бирелгән уртак буын формуласы $U_n = a_n x^n$ буенча дәрәҗәле рәтнең беренче өч буынын язарга һәм $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ рәтенең җыелучанлык өлкәсен табарга. $U_n = \frac{6^n \cdot x^n}{5^n \sqrt[4]{n}}$.

Чишү. Беренче өч буын:

$$U_1 = \frac{6x}{5}, U_2 = \frac{6^2 \cdot x^2}{5^2 \sqrt[4]{2}}, U_3 = \frac{6^3 \cdot x^3}{5^3 \sqrt[4]{3}}$$

Шулай ук, $a_n = \frac{6^n}{5^n \sqrt[4]{n}}, a_{n+1} = \frac{6^{n+1}}{5^{n+1} \sqrt[4]{n+1}}$. Җыелучанлык радиусын табабыз:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{6^n}{5^n \sqrt[4]{n}}}{\frac{6^{n+1}}{5^{n+1} \sqrt[4]{n+1}}} = \frac{5}{6} \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} = \frac{5}{6} \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} = \frac{5}{6}.$$

Җыелучанлык интервалы $\left(-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$.

$x = -\frac{5}{6}$ булсын. Санлы рәт табабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n \left(-\frac{5}{6}\right)^n}{5^n \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} + \cdots.$$

Бу тамгаалышмалы рәткә Лейбниц билгесен кулланабыз:

$$1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \ldots . > \frac{1}{\sqrt[4]{n}};\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0.$$

Ике шарт та үтәлә, димәк, $x = -\frac{5}{6}$ булганда рәт җыела.

$x = \frac{5}{6}$ булсын. Санлы рәт табабыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(\frac{5}{6}\right)^n}{5^n\sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \cdots$$

Таралучы гармоник рәт $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$белән чагыштырып, $n = 2$ дән башлап $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{n}$ тигезсезлегенең үтәлгәнен күрәбез, шуңа күрә чагыштыру билгесе буенча рәт тарала (чөнки гармоник рәт тарала).

Рәтнең җыелу өлкәсе $\left[-\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right[$.

4.5 Дәрәҗәле рәтләрнең бердәнберлеге

<u>Теорема:</u> Әгәр $\sum_0^\infty c_n(x - x_0)^n\ R > 0$, икән, рәт үз суммасының Тейлор рәте булып тора, ягъни әгәр $\sum_0^\infty c_n(x - x_0)^n = S(x)$ булса, $c_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$. Шуңа күрә, әгәр $(x_0 - R; x_0 + R), R > 0$ дә $\sum_0^\infty a_n(x - x_0)^n = \sum_0^\infty b_n(x - x_0)^n$ икән, $\forall$n $a_n = b_n$.

Исбатлау.

1. $S^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-m+1)c_n(x - x_0)^{n-m} = m!\,c_m + (m+1)\cdot m\cdot\ldots\cdot 2\cdot c_{m+1}(x - x_0) + \ldots$, биредән $S^{(m)}(x_0) = m!\,c_m$, $c_m = \frac{S^{(m)}(x_0)}{m!}$.

2. Әгәр $\sum_0^\infty a_n(x - x_0)^n = S(x)$ һәм $\sum_0^\infty b_n(x - x_0)^n = S(x)$ икән, $a_n = \frac{S^{(m)}(x)}{n!} = b_n \Rightarrow a_n = b_n$.

4.6. Дәрәҗәле рәтләрнең интеграллануы

Теорема:

Әгәр $(-R;R)$ да, биредә $R>0$, $S(x)=\sum_0^\infty c_nx^n$ икән, $(-R;R)$ да $\forall[x_0;x]\subset(-R;R)$ буенча рәтне буынлап интегралларга мөмкин, аерым алганда, $\forall x\in(-R;R)\int_0^x S(t)\,d\,t=\int_0^x(\sum c_nt^n)\,d\,t$ $=\sum\int_0^x c_nt^n\,d\,t=\sum\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$.

$\forall[x_0;x]$ та, (аерым алганда $[0;x]$) $x,x_0\in(-R;R)$ өчен $\sum c_nx^n$ рәте тигез җыела һәм c_nx^n лар өзлексез, рәтне буынлап интегралларга мөмкин. Бу вакытта җыелу радиусы үзгәрми, чөнки, башкача, ул $\sum\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ рәтен дифференциаллаганда үзгрер иде.

Әгәр $\sum_0^\infty a_nx^n=S(x)$ $(-R_1;R_2)$ аралыгында, $\sum_0^\infty b_nx^n=\sigma(x)$ $(-R_2;R_2)$ аралыгында һәм $R=min(R_1;R_2)$ икән, $(-R;R)$ аралыгында $S(x)\pm\sigma(x)=\sum_0^\infty\big((a_n\pm b_n)x^n\big)$, $S(x)\cdot\sigma(x)=\sum_0^\infty(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)x^n=\sum_{n=0}^\infty(x^n\sum_{i=0}^n a_ib_{n-i})$. (соңгысы $(-R;R)$ да ике рәтнең дә абсолют җыелганлыгыннан чыга).

Әгәр $\sum_0^\infty a_nx^n=S(x)$ $(-R_1;R_1)$ аралыгында, $\sum_0^\infty b_nx^n=\sigma(x)$ $(-R_2;R_2)$ аралыгында, $b_0\neq 0$ икән, $\exists R>0$: $(-R;R)$ аралыгында $\sum_0^\infty c_nx^n$, рәте җыела, биредә $\sum_0^\infty a_nx^n=\sum_0^\infty b_nx^n\cdot\sum_0^\infty c_nx^n$, ягъни $\sum_0^\infty c_nx^n=\frac{S(x)}{\sigma(x)}$.

4.7. Коши-Адамар формуласы:

Теләсә нинди дәрәҗәле рәт $\sum_0^\infty c_nx^n$ өчен шундый $R\in[0;\infty]$ саны бар ки, $|x|<R$ өчен рәт абсолют җыела, $|x|>R$ булганда рәт тарала. Әгәр $R=0$ икән, рәт бары тик $x=0$ өчен генә җыела. Әгәр $R=\infty$ икән, рәт $\forall x$ өчен абсолют тарала. Бу R саны җыелучанлык радиусы дип атала һәм аны $R=\frac{1}{l}$, где $l=\overline{lim\sqrt[n]{|c_n|}}$ (ягъни $R=\frac{1}{\overline{lim\sqrt[n]{|c_n|}}}$) формуласы буенча исәпләргә мөмкин.

1. $R\in(0;\infty)$ булсын, ягъни $l\in(0;\infty)$.

а) Башта $\forall x$: $|x|<\frac{1}{l}$ дип алыйк, ягъни $|x|\cdot l<1$. Ул вакытта шундый җитәрлек дәрәҗәдә кечкенә $\varepsilon>0$ бар ки: $|x|(l+\varepsilon)<1$. Билгеләмә буенча $l=\overline{lim\sqrt[n]{|c_n|}}$ һәм $l+\varepsilon$ нан уңдарак бары тик чикле сан $\sqrt[n]{|c_n|}$ булырга мөмкин, яки $\exists N : \forall n > N \;\Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$. Ул вакытта $\forall n > N \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|c_n|} < |x|(l + \varepsilon) < 1$, биредән, Коши радикаль билгесе буенча, $\sum_0^\infty c_n x^n$ рәте $\forall x \colon |x| < \frac{1}{l}$ өчен абсолют җыела.

б) Хәзер $\forall x \colon |x| > \frac{1}{l}$ дип алыйк, ягъни $|x| \cdot l > 1$. Ул вакытта җитәрлек дәрәҗәдә кечкенә $\varepsilon > 0$ бар ки: $|x|(l - \varepsilon) > 1$. Билгеләмә буенча $l = \overline{lim \sqrt[n]{|c_n|} \left\{ \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \right\} \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}}$. Ул вакытта $\exists K : \;\forall k > K \;\Rightarrow \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > l - \varepsilon$, димәк, $\sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > |x|(l - \varepsilon) > 1$, биредән $k > K |c_{n_k} x^{n_k}| > 1 \Rightarrow$ рәт тарала, чөнки $c_n x^n \not\to 0, n \to \infty$.

2. Хәзер $R = \infty$, ягъни $l = 0$ булсын, ягъни $\overline{lim \sqrt[n]{|c_n|}}$. $\forall n \sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$ булганга, эзлеклелекнең барлык өлешчә чикләмәләре $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 0$, ә аларның иң зуры 0 булганга, $\sqrt[n]{|c_n|}$ эзлеклелегенең бер өлешчә чикләмәсе бар, ягъни $\exists \, lim \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. $\forall x \in (-\infty; \infty)$ өчен $\sum c_n x^n$ рәтенең абсолют җыелганын күрсәтик. $\sqrt[n]{|c_n|} \to 0, n \to \infty$, булганга, $\exists N : \forall n > N \Rightarrow \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|x|}$. Ул вакытта $\sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x|\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2} < 1$ һәм Кошиның радикаль билгесе буенча $\sum c_n x^n$ абсолют җыела.

3. Ниһаять $R = 0$, ягъни $l = \infty$ булсын. Бу исә $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ эзлеклелегенең өстән чикләнмәгәнен күрсәтә. $\forall x_0 \neq 0$ өчен $\sum c_n x_0^n$ рәтенең таралуын исбатлыйк. Ул җыела дип фараз кылыйк. Ул вакытта $c_n x_0^n \to 0$, $n \to 0$. Ул вакытта $\{c_n x_0^n\}$ чикләнгән, ягъни $\exists A > 1 \colon |c_n x_0^n| < A$, биредән $\sqrt[n]{|c_n x_0^n|} = |x_0|\sqrt[n]{|x_n|} < \sqrt[n]{A} < A$, димәк, $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{A}{|x_0|}$, ягъни $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ чикләнгән, бу шартка каршы килә, димәк $\sum c_n x_0^n$ тарала.

$\sum c_n (x - x_0)^n$ өчен абсолют җыелучанлык $|x - x_0| < R$ һәм таралучанлык $|x - x_0| > R$ өчен булачак.

$\{|x - x_0| < R\}$ күплеге җыелучанлык түгәрәге дип атала.

4.8. Маклорен рәте

$f(x)$ функциясен Маклорен рәтенә таркату мондый рәвешле:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \qquad (8)$$

Түбәндәге функцияләрнең таркатылышлары иң еш кулланыла:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots. + \frac{x^n}{n!} + \cdots + \cdots (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots. + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots. + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots (-1 < x \le 1);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots\big(m-(n-1)\big)}{n!}x^n + \cdots (-1 < x \le 1);$$

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots (-1 \le x \le 1).$$

1 нче мәсьәлә. $f(x) = (1+x)^m$ функциясенең Маклорен рәтенә таркатылышын файдаланып, $\sqrt[4]{17}$ кыйммәтен 0,0001 төгәллеге белән исәпләгез.

Чишү. Үзгәртүләрне башкарабыз. $\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = 2\left[1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3 + \cdots\right] = 2[1 + 0{,}01562 - 0{,}00037 + 0{,}00001 - \cdots$

Табылган рәт тамгаалмашлы, аның буыннарының абсолют зурлыклары кими, шуңа хата беренче ташланган буыннан зуррак булмаячак. $2 \cdot 0{,}00001 < 0{,}0001$ булуы ачык.

Димәк, $\sqrt[4]{17} \approx (2 + 0{,}01562 - 0{,}00037) \approx 2{,}0305$.

2 нче мәсьәлә. $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$ интегралын интеграласты функциясенең Маклорен рәте рәвешендә күрсәтеп, җыелучан рәт рәвешендә күрсәтергә. Бу интерал кыйммәтен 0,001 төгәллеге белән исәпләргә.

Чишү.

4.9. Рәтләрнең абсолют һәм шартлы җыелулары. Лейбниц рәтләре.

Яңадан гомуми рәвешле рәтләрне карауга кайтыйк.

Билгеләмә. $\sum a_n$ рәте, әгәр дә $\sum |a_n|$ рәте җыела икән, абсолют җыелучан дип атала.

Теләсә нинди тискәре булмаган буынлы җыелучан рәтнең абсолют җыелучанлыгы ачык. Мисал сыйфатында мондый рәтне китерергә була:

$$-1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \cdots$$

Аның суммасы нульгә тигез, шул ук вакытта буыннарның модульләреннән төзелгән рәт гармоник рәт таралганга күрә, тарала.

Билгеләмә. $\sum a_n$ җыелучан рәте, әгәр дә $\sum |a_n|$ тарала икән, шартлы җыелучан рәт дип атала.

Бу билгеләмә буенча, әле генә каралган рәт шартлы җыелучан була. Абсолют (яисә шартлы) җыелучан рәт турында рәт абсолют (яисә шартлы) җыела диләр. Кертелгән төшенчәләрнең максатчанлыгы түбәндәге теоремадан күренә.

Теорема. Әгәр $\sum a_n$ рәте абсолют җыела икән, ул җыелучан була.

Исбатлау. Коши критерие буенча $\sum |a_n|$ рәтенең җыелуыннан теләсә кайсы $\varepsilon > 0$ өчен шундый $n_0(\varepsilon)$ номеры бар ки, теләсә нинди $p \geq 1, n \geq n(\varepsilon)$ өчен:

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon,$$

Биредән

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon$$

Бу исә Коши критериеның үтәлгәнен күрсәтә. Теорема исбатланды.

Билгеләмә. $\sum a_n$ рәте, әгәр дә аның күрәе буыннары төрле тамгага ия икән, тамгаалмашлы дип атала.

Билгеләмә. Тамгаалмашлы $\sum a_n$ рәте, әгәр дә аның гомуми буыны $|a_n|$ нульгә монотон омтыла икән, Лейбниц рәте дип атала.

Теорема. Теләсә кайсы Лейбниц рәте $\sum a_n$ җыела.

Исбатлау. Башта бу рәтнең теләсә кайсы кисемтәсе аның беренче буыны белән мажориторланганын күрсәтик. Без мондый тигезсезлекне исбатларга телибез:

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leq |a_{n+1}|.$$

Барлык $k \in N$ өчен $b_k = |a_k|$ дип куйыйк. Ул вакытта

$$|a_k + a_{k+1}| = |a_k| - |a_{k+1}| = b_k - b_{k+1} < b_k.$$

Моннан тыш, барлык k өчен $(a_k + a_{k+1})$ саннарының тамгалары бер төрле. Шуңа күрә, җөп $P = 2r$ өчен

$$0 \leq |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots .. + a_{n+2r-1} + a_{n+2r}| =$$
$$(b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2r-1} - b_{2r}) =$$
$$= b_1 - (b_2 - b_3) - \cdots (b_{2r-2} - b_{2r-1}) - b_{2r} \leq b_1 = |a_{n+1}|$$

Әгәр дә $P = 2r + 1$ так икән,

$$0 \leq |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots .. + a_{n+2r+1}| = (b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2r-1} - b_{2r}) + b_{2r+1} =$$
$$(b_1 - b_2) + \cdots + (b_{2r} - b_{2r+1}) \leq b_1 = |a_{n+1}|.$$

Шулай итеп, ике очракта да

$$T_{n,p} = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leq |a_{n+1}| = b_{n+1}.$$

Ләкин, $b_{n+1} \to 0$ булганга, теләсә нинди $\varepsilon > 0$ һәм җитәрлек дәрәҗәдә зур n өчен

$$T_{n,p} \le b_{n+1} < \varepsilon.$$

Бирєдән, p ирекле булганга, Коши критериннан $\sum a_n$ рәте җыела дигән нәтиҗә ясыйбыз. Теорема исбатланды.

Теорема (Лейбниц рәтенең калдыгын бәяләү) $\sum a_n$ Лейбниц рәтенең r_n калдыгы өчен $|r_n| \le |a_{n+1}|$ тигезсезлеге үтәлә.

Исбатлау. Әле генә исбатланган теорема буенча, $\sum a_n$ рәте җыела, шуңа

$$|r_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m\right|.$$

Әле генә исбатланган теоремада теләсә кайсы натураль p өчен

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \le |a_{n+1}|$$

табылган иде $p \to \infty$ дип куеп, таләп ителгән тигезсезлекне табабыз. Теорема исбатланды.

4.10. Абель һәм Дирихле билгеләре.

Абель һәм Дирихле билгеләре санлы рәтләрнең җитәрлек дәрәҗәдә киң классын тикшергәндә кулланыла. Ике билгене дә исбатлау Абель дискрет үзгәртүе формуласына нигезләнә. Хәзер аны исбатлыйк.

Теорема 1. $A_k = \sum_{m=N+1}^{k} a_m$ булсын. Ул вакытта, $M > N$ булганда, мондый формулалар дөрес:

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad (1);$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_{M+1} + \sum_{k=N+1}^{M} A_k (b_k - b_{k+1}) \qquad (2);$$

Исбатлау Барыннан да элек формулаларның уң яклары үзара тигез икәнлеген искәртик. Чөнки, (1) формуласының уң ягыннан (2) формуласының уң ягын алып, табабыз:

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M (b_M - b_{M+1}) = 0.$$

Димәк, (1) формуласын исбатлау җитә. Анының уң ягын үзгәртеп, табабыз:

$$A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_{k+1}$$

$$=$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} A_k b_k - \sum_{l=N+2}^{M} A_l b_l = A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} (A_k - A_{k-1}) b_k =$$

$$a_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k.$$

Шулай итеп, 1 нче теорема исбатланды.

Абель һәм Дирихле билгеләре $\sum a_n b_n$ рәвешле рәтләргә кулланыла.

Теорема 2.Түбәндәге расламалар дөрес:

(А) (Абель билгесе). Әгәр b_n эзлеклелеге монотон һәм чикләнгән, $\sum a_n$ рәте җыела икән, $\sum a_n b_n$ рәте шулай ук җыела.

(Д) (Дирихле билгесе). Әгәр b_n эзлеклелеге монотон һәм

$n \to \infty$ булганда $b_n \to 0$ һәм $\sum a_n$ рәтенең өлешчә суммалары эзлеклелеге s_n чикләнгән икән, $\sum a_n b_n$ рәте шулай ук җыела.

Исбатлау. $b_n \geq 0$ һәм b_n кими очрагы белән чикләник. Барлык калган очраклар моңа түбәндәгечә китерелә. Әгәр $b_n \leq 0$ икән, барлык a_n һәм b_n нарның тамгаларын үзгәртергә кирәк. Әгәр дә b_n үсүче булса, b_n ны $b_n = b_0 - d_n$, $b_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ рәвешендә күрсәтергә һәм теореманы $\sum a_n d_n$ рәтен тикшерүгә китерергә була. Биредә инде d_n кими.

Теорема исбатлауны $\sum a_n b_n$ рәтенә Коши критериен кулланып башкарабыз. Моның өчен бу рәт кисемтәсе $T_{n,p}$ га Абель үзгәртүенең (1) формуласын кулланабыз. $A_k = s_k - s_n$ дип куеп һәм $b_k - b_{k-1} \geq 0$ не исәпкә алып, табабыз:

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(b_k - b_{k+1})\right| \leq$$

$$\leq |A_{n+p}| b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leq$$

$$\max_{n<k<n+p} |A_k|\, b_{n+1}$$

Хәзер исә (А) очрагын карыйк. b_n чикләнгән булганга, ниндидер с һәм барлык n өчен $b_{n+1} < c$. $\sum a_n$ рәте җыела, шуңа күрә теләсә нинди $\varepsilon > 0$ өчен шундый $n_0(\varepsilon)$ бар ки, барлык $n > n_0(\varepsilon), k > n$ өчен

$$|A_k| = \left| \sum_{m=n+1}^{k} a_m \right| = |s_k - s_n| \leq |s_k| + |s_n| < \varepsilon.$$

Ул вакытта күрсәтелгән n һәм теләсә нинди p өчен $T_{n,p}$ өчен

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \mathrm{c}\varepsilon.$$

Ләкин ε ирекле, ә с билгеле бер кыйммәтле, димәк, соңгы тигезсезлек $\sum a_n b_n$ рәтенең Коши критериен канәгатьләндерүен аңлата, шуңа ул җыела. Шулай итеп, Абель билгесе исбатланды.

(Д) очрагында $\sum a_n$ рәтенең өлешчә суммалары A_k чикләнгән, шуңа барлык k өчен $|A_k| < c$ булырлык с бар. Моннан тыш $b_n \rightarrow 0$.Димәк, ирекле $\varepsilon > 0$ өчен җитәрлек дәрәҗәдә зур $n > n_0(\varepsilon)$ һәм ирекле $p \geq 1$ өчен табабыз:

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq \mathrm{c}\varepsilon$$

Биредән, (А) очрагындагы кебек үк, Коши критерие буенча $\sum a_n b_n$ рәтенең җыелучан икәнен табабыз. 2 нче теорема тулысынча исбатланды.

ЙОМГАКЛАУ

Сезгә тәкъдим ителгән уку әсбабы математик анализның башлангыч өлешен үз эченә ала. Модый әсбап чыгарырга мөмкинлек биргән өчен без Татарстан мәгариф һәм фән министрлыгына рәхмәтле. Билгеле, татар телендә укыту һәр яктан кысылган бу заманда татарча югары уку йорты өчен әсбаплар нигә кирәк, гомумән, татарча математика укыту нигә кирәк дигән сораулар күп барлыкка килер. Әле дә “без татарча укыган аркасында карьера ясый алмадык” дип уйлаучы наданнар бик күп, алар татарча уку аркасында түгел, үзләренең аңгыралыклары аркасында карьера ясый алмаганлыкларына җәмгыятьне ышандырырга телиләр.

Тәкъдим ителгән уку әсбабы 90-нчы елларда нәшер ителгән татарча математик анализ курсларын кабатламый. Без хәзерге заманда уку планнарында математик анализ өчен вакыт киметелгәнне исәпкә алып, тәкъдир итүне практикага максималь якынайтырга һәм күбрәк материалны студент аңларлык итеп колачларга тырыштык. Шулай ук, кызыксынучан студентлар өчен әдәбият исемлеге дә китерелә. Кызганычка каршы, хәзерге вәзгыять аркасында студентларыбыз туган телләрен бик начар җеләләр. Шуңа күрә әсбапта кулланылган терминнар өчен татарча-русча сүзлек тә китерелде.

Без киләчәктә бу әсбап татарча укучы һәм укырга тырышучы студентларга яхшы ярдәмлек булыр һәм аллаһы боерса киләчәктә татарча уку калыр һәм киңәер дигән өметтә калабыз.

КУЛЛАНЫЛГАН МАТЕМАТИК ТЕРМИННАР БУЕНЧА КЫСКАЧА ТАТАРЧА-РУСЧА СҮЗЛЕК

Математик анализга кереш

Абсолют зурлык – абсолютная величина

Алгебраик гамәл – алгебраическое действие

Аналитик ысул – аналитический способ

Аналогия җуенча – аналогично, по аналогнии

Аскүплек – подмножество

Әйләнә – окружность

Әйләнә үзәге – центр окружности

Барлык кванторы – квантор существования

Бәйле үзгәрешле – зависимая переменная

Бәйсез үзгәрешле – независимая переменная

Билгеләгеч – определитель

Билгеләнү өлкәсе – область определения

Бөтен сан – целое число

Бөтен тискәре күрсәткечле дәрәҗәле функция – функция с целым отрицательным показателем

Буш күплек – пустое множество

Гаусс методы – метод Гаусса

Геометрик образ – геометрический образ

Гомуми рәвештәге функция – функция общего вида

Гомумилек кванторы – квантор общности

График ысул – графический способ

Җөп – четный

Җөп функция – четная функция

Җөплек – четность

Зурлык – величина

Зуррак кыйммәт – большее значение

Ике туры арасындагы почмак – угол между двумя прямыми

Иң зур аскы чик – наибольшая нижняя граница

Ирекле буыннар матрица - баганасы – матрица-столбец свободных членов

Катлаулы функция – сложная функция

Кечерәк кыйммәт – меньшее значение

Киңәйтелгән матрица – расширенная матрица

Кире матрица – обратная матрица

Кисемтә – отрезок

Координатлар системасы – система координат

Күплек – множество

Күплекләрнең аермасы – разность множеств

Күплекләрнең берләшмәсе – объединение множеств

Күплекләрнең кисешүе – пересечение множеств

Күчәр – ось

Кхрсәткечле функция – показательная функция

Кыйммәт – значение

Кыйммәтләр өлкәсе – область значений

Логарифмик функция – логарифмическая функция

Матрицалы форма – матричная форма

Матрицаның базис миноры – базисный минор матрицы

Монотон кими – монотонно убывает

Монотон үсә – монотонно возрастает

Монотонлык – монотонность

Ох күчәре – ось Ox

Өске кыр – верхняя грань

Өске чик – верхняя граница

Өстән чикләнгән – ограниченный сверху

Өчпочмаклы хәлгә китерелде – приведен в треугольный вид

Параллельлек шарты – условие параллельности

Периодик – периодичный

Периодиклык – периодичность

Почмакча коэффициент – угловой коэффициент

Реаль саннар – действительные числа

Санлы кыйммәт – численное значение

Саннар күплеге – числовое множество

Система матрицасы рангы – ранг матрицы системы

Системаның бердәнбер чишелеше бар – у системы есть единственное решение

Системаның чишелеше – решение системы

Сызыкча тигезләмәләр системасы – система линейных уравнений

Таблица ысулы – табличный способ

Так – нечетный

Так функция – нечетная функция

Таклык – нечетность

Тәңгәл – тождественный

Тигез хәрәкәт – равномерное движение

Тигезкөчле – равносильный

Тигезсезлек – неравенство

Тиңдәш куелу – поставить в соответствие

Тиңдәшлек законы – закон соответствия

Тискәре сан – отрицательное число

Төгәл кыр – точная грань

Туры сызык – прямая

Турыларның кисешү ноктасы – точка пересечения прямых

Турының гомуми тигезләмәсе – общее уравнение прямой

Үзгәрешле – переменная

Үзгәрешлеләр матрица-баганасы – матрица-столбец неизвестных

Уңай сан – положительное число

Уртак нокталар саны – количество общих точек

Функөияләр суперпозициясе – суперпозиция функций

Функциядән функция – функция от функции

Функцияләр композициясе – композиция функция

Функцияләрнең төп үзлекләре – основные свойства функций

Функцияне билгеләү ысуллары – спсобы задания функции

Чикләнгәнлек – ограниченность

Чишелеш – решение

Элементар функция – элементарная функция

Ярашлы система – соместимая система

Ярыминтервал – полуинтервал

Яссылыктагы линия – линия на плоскости

Функциянең чыгарылмасы һәм дифференциалы

Аерым чыгарылма – частная производная

Аныклык өчен – для ясности

Аралык – промежуток

Аскы чикләмә – нижний предел

Асэзлеклелек – подпоследовательность

Бәйләнеш – связь

Бәйсез үзгәрешле – независимая переменная

Вакыт мизгеле – момент времени

Геометрик мәгънә – геометрический смысл

Даими – постоянная

Дифференциал форма инвариантлыгы – инвариантность дифференциальной формы

Дифференциал ярдәмендә якынча исәпләүләр – приближенные вычисления при помощи дифференциала

Дифференциалланучы функция – дифференцируемая функция

Дифференциаллау кагыйдәләре – правила дифференцирования

Дифференциаль исәпләү – дифференөиальное исчисление

Җыелучан – сходящийся

Җыелучан асэзлеклелек – сходящийся подпоследовательность

Җыелучан эзлеклелек чикләнгән – сходящийся последовательность ограничена

Җыелучан эзлеклелекләр белән арифметик гамәлләр – арифметические действия со сходящимися последовательностями

Калдык буын – остаточный член

Катлаулы функция чыгарылмасы – производная сложной функции

Кертелмәле кисемтәләр – вложенные отрезки

Кимемәүче эзлеклелек – неубывающая последовательность

Кисемтәдә өзлексез функция – функция, непрерывная на отрезке

Критик нокта – критическая точка

Кырый чикләмәләр – граничные пределы

Кысылган үзгәрешле турында теорема – теорема о зажатой переменной

Монотон эзлеклелек – монотонная последовательность

Монотон эзлеклелекнең җыелу критерие – критерий сходимости монотонной последовательности

Ноктада өзлексез функцияләр – функции, непрерывные в точке

Ньютон биномы – бином Ньютона

Орынма тигезләмәсе – уравнение касательной

Орынма турында мәсьәлә – задача о касательной

Өзелү нокталары – точки разрыва

Өзлексез функцияләрнең сызыкча комбинациясе – линейная комбинация непрерывных функций

Өзлексезлек – непрерывность

Өлешчә чикләмә – частичнаый предел

Өске чикләмә – верхний предел

Өстән чикләнгән – ограничен(а) сверху

Санлы эзлеклелек – числовая последовательность

Санлы эзлеклелек чикләмәсе – предел числовой последовательности

Стандарт таркатылышлар – стандартные разложения

Таралучан – расходящийся

Тейлор күпбуыны – многочлен Тейлора

Тирәлек – окрестность

Тирәлек тышында – вне окрестности

Төп чикләмәләр – основные пределы

Үсемтә – приращение

Фиксацияләнгән кыйммәт – фиксированное значение

Фундаменталь эзлеклелек – фундаментальная последовательность

Функция дифференциалы – дифференциал функции

Функция өзлексезлеге – непрерывность функции

Функция чыгарылмасы – производная функции

Функциянең чиксезлектә һәм ноктада чикләмәсе - предел функции в бесконечности и в точке

Хәрәкәт тизлеге турында мәсьәлә – задача о скорости движения

Хезмәт җитештерүчәнлеге турында мәсьәлә – задача о производительности труда

Чагыштырма – отношение

Чикләмә – предел

Чикләмә барлыгы билгеләре – признаки существования предела

Чиксез зур – бесконечно большое

Чиксез зур зурлык – бесконечно большая величина

Чиксез кечкенә – бесконечно малое

Чиксез кечкенә зурлык – бесконечно малая величина

Чиксезлек – бесконечность

Чыгарылма – производная

Чыгарылма исәпләү схемасы – схема вычисления производной

Чыгарылманың геометрик мәгънәсе – геометрический смысл производной

Чыгарылманың кулланылышы – применение производной

Чыгарылманың механик мәгънәсе – механический смысл производной

Чыгарылманың экономик мәгънәсе – экономический смысл производной

Эзлеклелек буыннары – члены последовательности

Эзлеклелек чикләмәсенең бердәнберлеге – единственность предела последовательности

Эзлеклелекнең җыелу критерие – критерий сходимости последовательности

Экстремумның җитәрлек шарты – достаточное условие экстремума

Экстремумның кирәкле шарты – необходимое условие экстремума

Элементар функцияләр чыгарылмалары – производные элементарных функций

Югары дәрәҗәле чыгарылмалар – производные высших порядков

Ярдәмче функция – вспомогательная функция

Интеграл

Анык интеграл – определенный интеграл

Анык интеграл булуның җитәрлек шарты достаточное условие существования определенного интеграла

Анык интеграл исәпләү методлары – методы вычисления определенного интеграла

Анык интегралның геометрик мәгънәсе – геометрический смысл определенноого интеграла

Аныксыз интеграл – неопределенный интеграл

Ачык өске чикле интеграл интеграл с открытым верхним пределом

Башлангыч – первообразная

Башлангыч функция – первообразная функция

Биномиаль дифференциаллар – биномиальные дифференциалы

Вакланманың бөтен өлеше – целая часть дроби

Даими кушылучыга кадәр төгәллек с точностью до постоянной слагаемой

Интеграл астындагы үзгәрешле – поңынтегральная переменная

Интеграл тамгасы – знак интеграла

Интеграласты функциясе – подынтегаальная функция

Интеграль сумма – интегральная сумма

Иррациональ аңлатмаларны интеграллау – интегрирование иррациональных дробей

Исәпләнелмәүче интеграллар – невычисляемые интегралы

Өлешләп интеграллау методы – метод интегрирования по частям

Өске чиге үзгәрешле булган анык интеграл – интеграл с переменным верхним пределом

Рациональ вакланмаларны интеграллау – интегрирование рациональных дробей

Таблица интеграллары – табличные интегралы

Үз булмаган интеграллар – несобственные интегралы

Үзгәрешлене алыштыру методы – метод замены переменных

Универсаль алыштыру – универсальная замена

Урта кыйммәт турында теорема – теорема о среднем значении

Чиксез аскы (өске) чикле үз булмаган интеграл – несобственный интеграл с бесконечным нижним (верхним) пределом

Рәтләр

Абсолют җыелу билгесе – признак абсолютной сходимости

Гомуми буын – общий член

Даламбер билгесе – признак Даламбера

Дәрәҗәле рәт – степенной ряд

Җыелуның җитәрлек шарты – достаточное условие сходимости

Җыелуның кирәкле шарты - необходимое условие сходимости

Җыелучан рәт – сходящийся ряд

Җыелучанлык радиусы - радиус сходимости

Җыелучанлыкның Лейбниц билгесе – признак сходимости Лейбница

Коши радикаль билгесе – радикальный признак Коши

Өлешчә сумма – частичная сумма

Рәт – ряд

Рәт коэффициентлары – коэффииенты ряда

Рәт тарала – ряд расходится

Рәтнең җыелу өлкәсе – область схолдимости ряда

Санлы рәт – числовой ряд

Тамга үзгәрешле рәтләр – знакопеременные ряды

Тамгаалышмалы рәтләр – знакочередующиеся ряды

Таралучы гармоник рәт – расходящийся гармонический ряд

Уңай буынлы санлы рәт җыелуы билгеләре – признаки сходимости числового ряда с положительными членами

Функциональ рәт – функиональный ряд

Чагыштыру билгесе – признак сравнения

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ

1. Аксенов, А.П. Математический анализ в 4 ч. часть 2: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 344 с.

2. Аксенов, А.П. Математический анализ в 4 ч. часть 3: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 361 с.

3. Аксенов, А.П. Математический анализ в 4 ч. часть 4: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 406 с.

4. Аксенов, А.П. Математический анализ в 2 ч. часть 1 в 2 т: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 626 с.

5. Аксенов, А.П. Математический анализ в 2 ч. часть 2 в 2 т: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 767 с.

6. Аксенов, А.П. Математический анализ в 4 ч. часть 1: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 282 с.

7. Баврин, И.И. Математический анализ: Учебник и практикум для СПО / И.И. Баврин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 327 с.

8. Баврин, И.И. Математический анализ для педагогических вузов: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 327 с.

9. Балдин, К.В. Математический анализ: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев.. - М.: Флинта, МПСУ, 2013. - 368 с.

10. Барбаумов, В.Е. Математический анализ: N-мерное пространство. Функции. Экстремумы: Учебник / В.Е. Барбаумов, Н.В. Попова. - М.: Инфра-М, 2018. - 480 с.

11. Боярчук, А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т.3. Часть 2: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / А.К. Боярчук, И.И. Ляшко, Я.Г. Гай. - М.: КД Либроком, 2012. - 256 с.

12. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. - СПб.: Лань, 2012. - 544 с.

13. Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон.. - СПб.: Лань, 2012. - 544 с.

14. Бутузов, В., Ф. Математический анализ в вопросах и задачах / В.Ф. Бутузов, Г.Н. Крутицкая и др. - СПб.: Лань, 2008. - 480 с.

15. Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев и др. - СПб.: Лань, 2008. - 480 с.

16. Ведина, О. Математический анализ для экономистов / О. Ведина. - СПб.: Лань, 2004. - 360 с.

17. Ведина, О.И. Математический анализ для экономистов / О.И. Ведина. - СПб.: Лань, 2004. - 344 с.

18. Виноградов, О.Л. Математический анализ / О.Л. Виноградов. - СПб.: BHV, 2017. - 752 с.

19. Виноградова, И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.1: Дифференциальное и интегральное исчис / И.А. Виноградова. - М.: МЦНМО, 2017. - 412 с.

20. Виноградова, И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.3: Кратные, криволинейные и поверхностны / И.А. Виноградова. - М.: МЦНМО, 2018. - 256 с.

21. Виноградова, И.А. Математический анализ в задач и упражнениях. В 3-х томах. Т.2: Ряды и несобственные интегралы / И.А. Виноградова. - М.: МЦНМО, 2018. - 480 с.

22. Воробьев, Е.М. Компьютерный практикум по математике. Математический анализ. Линейная алгебра / Е.М. Воробьев. - М.: КДУ, 2009. - 604 с.

23. Воробьёв, Е.М. Компьютерный практикум по математике. Математический анализ. Линейная алгебра: Учебное пособие / Е.М. Воробьёв. - М.: КДУ , 2009. - 604 с.

24. Гаврилов, В.И. Математический анализ: учебник / В.И. Гаврилов. - М.: Academia, 2016. - 320 с.

25. Гаврилов, В.И. Математический анализ: Учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования / В.И. Гаврилов, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. - М.: ИЦ Академия, 2013. - 336 с.

26. Горлач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2013. - 308 с.

27. Горлач, Б.А. Математический анализ / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2013. - 608 с.

28. Горлач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2013. - 608 с.

29. Гусак, А.А. Математический анализ и диф. Уравнения: Справ. пособие к реш. задач / А.А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2008. - 416 с.

30. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи: Учебное пособие / А.А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 416 с.

31. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 416 с.

32. Демина, Т.И. Математический анализ для эконом.: практ.: Учебное пособие / Т.И. Демина, О.П. Шевякова. - М.: Инфра-М, 2013. - 384 с.

33. Драгалин, А.Г. Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ. ("Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств", и др.) / А.Г. Драгалин. - М.: УРСС, 2003. - 544 с.

34. Дюпре, Ж.-Л. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / Ж.-Л. Дюпре. - СПб.: Лань П, 2016. - 544 с.

35. Евсеев, Ф.Е. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / Ф.Е. Евсеев. - СПб.: Лань, 2008. - 480 с.

36. Епифанов, А.П. Математический анализ для экономистов / А.П. Епифанов. - СПб.: Лань, 2004. - 360 с.

37. Заднепровская, Г.В. Математический анализ: Учебное пособие / Г.В. Заднепровская. - СПб.: Лань, 2013. - 608 с.

38. Земляков, А.Н. Математический анализ реальности / А.Н. Земляков. - М.: МЦНМО, 2013. - 360 с.

39. Зисман, Г.А. Математический анализ: Учебное пособие / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. - СПб.: Лань П, 2016. - 448 с.

40. Злобина, С.В. Математический анализ в задачах и упражнениях / С.В. Злобина, Л.Н. Посицельская. - М.: Физматлит, 2009. - 360 с.

41. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 2 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2012. - 818 с.

42. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 2 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2017. - 676 с.

43. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 1 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2018. - 564 с.

44. Зорич, В.А Математический анализ задач естествознания. / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2017. - 160 с.

45. Зорич, В.А Математический анализ задач естествознания. / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2008. - 136 с.

46. Зорич, В.А Математический анализ. Часть 1 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2012. - 702 с.

47. Зорич, В.А Математический анализ. В 2-х частях / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2007. - 1480 с.

48. Зорич, В.А Математический анализ. В 2-х томах т.1 и т.2 / В.А Зорич. - М.: МЦНМО, 2012. - 1520 с.

49. Иванов, О.А. Математический анализ для первокурсников / О.А. Иванов. - М.: МЦНМО, 2013. - 136 с.

50. Ивлев, В.В. Математический анализ. Функции многих переменных / В.В. Ивлев. - М.: ИКАР, 2013. - 548 с.

51. Ильин, В.А. Математический анализ. Ч. 1: Учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 660 с.

52. Ильин, В.А. Математический анализ. Ч. 2: Учебник для бакалавров / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 357 с.

53. Карташев, А.П. Математический анализ: Учебное пособие / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. - СПб.: Лань, 2007. - 448 с.

54. Карташев, А.П. Математический анализ / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. - СПб.: Лань, 2007. - 448 с.

55. Кипнис, М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / М. Кипнис. - СПб.: Лань, 2005. - 288 с.

56. Киреев, В.И. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. - СПб.: Лань, 2006. - 288 с.

57. Кирилловский, В.К. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / В.К. Кирилловский. - СПб.: Лань, 2008. - 288 с.

58. Киркинский, А.С. Математический анализ / А.С. Киркинский. - М.: Академический проект, 2006. - 526 с.

59. Киркинский, А.С. Математический анализ: Учебное пособие для ВУЗов / А.С. Киркинский. - М.: Академический проект, 2006. - 526 с.

60. Кирнев, А.Д. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / А.Д. Кирнев. - СПб.: Лань П, 2016. - 288 с.

61. Козин, Р.Б. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное

пособие / Р.Б. Козин, Н.И. Кривцов, В.И. Лебедев и др. - СПб.: Лань, 2007. - 320 с.

62. Козлов, В.М. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное пособие / В.М. Козлов. - СПб.: Лань, 2009. - 320 с.

63. Козлов, Н.Н. Математический анализ генетического кода / Н.Н. Козлов. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. - 215 с.

64. Козлов, Н.Н. Математический анализ генетического кода / Н.Н. Козлов. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012. - 215 с.

65. Козлов, Н.Н. Математический анализ генетического кода / Н.Н. Козлов. - М.: Бином, 2015. - 215 с.

66. Козлов, С., А. Математический анализ на многообразиях: Учебное пособие / С. А. Козлов, В. А. Парфенов. - СПб.: Лань, 2005. - 160 с.

67. Колесник, Г.В. Управление производственными системами с распределенными правами собственности: Экономико-математический анализ / Г.В. Колесник. - М.: КД Либроком, 2019. - 128 с.

68. Кострикин, А. Математический анализ. Функции одного переменного: Учебное пособие / А. Кострикин, Ю. Манин. - СПб.: Лань, 2002. - 880 с.

69. Краснова, С.А. Математический анализ для экономистов в 2 ч. часть 1: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С.А. Краснова, В.А. Уткин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 298 с.

70. Краснова, С.А. Математический анализ для экономистов в 2 ч. часть 2: Учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С.А. Краснова, В.А. Уткин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 315 с.

71. Кытманов, А.М. Математический анализ.: Учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 607 с.

72. Лейнартас, Е.К. Математический анализ: Учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, В.Н. Лукин; Под ред. А.М. Кытманов. - М.: Юрайт, 2012. - 607 с.

73. Лоссиевская, Т.В. Математический анализ: несобственные интегралы: Учебное пособие / Т.В. Лоссиевская. - М.: МИСиС, 2012. - 61 с.

74. Ляшко, И. АнтиДемидович. Т.2. Ч.1: Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ / И. Ляшко, А.К. Боярчук. - М.: КД Либроком, 2013. - 224 с.

75. Ляшко, И. Антидемидович. Т.3. Ч.1. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ / И. Ляшко, А.К. Боярчук. - М.: КД Либроком, 2013. - 160 с.

76. Ляшко, И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.1: Ряды: Учебное пособие / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: КД Либроком, 2015. - 224 с.

77. Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т.1. Ч.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: Ленанд, 2019. - 238 с.

78. Ляшко, И.И. Справочное пособие по высшей математике.Т. 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Часть 1. Радя: Учебное пособие / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай. - М.: ЛКИ, 2012. - 224 с.

79. Ляшко, И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т.2: Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Ч.2: Дифференциальное исчисление функций вект / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: ЛКИ, 2015. - 224 с.

80. Ляшко, И.И. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента: Часть 2:

Дифференциальное исчисление векторного аргумента / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай. - М.: ЛКИ, 2013. - 224 с.

81. Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т.3. Ч.2: Кратные и криволинейные интегралы. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: КД Либроком, 2012. - 256 с.

82. Ляшко, И.И. АнтиДемидович. Т.1. Ч.1: Введение в анализ. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: Ленанд, 2015. - 238 с.

83. Ляшко, И.И. Антидемидович. Т.3. Ч.1. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: интегралы, зависящие от параметра / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. - М.: Ленанд, 2016. - 160 с.

84. Малугин, В.А. Математический анализ для экономического бакалавриата: Учебник и практикум / В.А. Малугин. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 557 с.

85. Никитин, А.А. Математический анализ. углубленный курс: Учебник и практикум для академического бакалавриата / А.А. Никитин, В.В. Фомичев. - Люберцы: Юрайт, 2016. - 460 с.

86. Опойцев, В.И. Школа Опойцева: Математический анализ / В.И. Опойцев. - М.: Ленанд, 2017. - 272 с.

87. Очан, Ю.С. Математический анализ: Учебное пособие / Ю.С. Очан, В.Е. Шнейдер. - М.: Альянс, 2016. - 880 с.

88. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2006. - 288 с.

89. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2005. - 288 с.

90. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2008. - 288 с.

91. Петрушко, И.М. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум: Учебное пособие / И.М. Петрушко. - СПб.: Лань, 2009. - 288 с.

92. Понтрягин, Л.С. Математический анализ для школьников / Л.С. Понтрягин. - М.: Ленанд, 2019. - 104 с.

93. Просветов, Г.И. Математический анализ: задачи и решения: Учебное пособие / Г.И. Просветов. - М.: БИНОМ. ЛЗ, 2011. - 208 с.

94. Протасов, Ю.М. Математический анализ: Учебное пособие / Ю.М. Протасов. - М.: Флинта, Наука, 2012. - 168 с.

95. Рыбников, К.А. История математики: Подисциплинарное изложение: Геометрия. Алгебра и теория чисел. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Дискретная математика / К.А. Рыбников. - М.: Ленанд, 2018. - 536 с.

96. Сидоров, А.В. Математический анализ. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл / А.В. Сидоров. - М.: МГИУ, 2006. - 114 с.

97. Соловьев, И.А. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. - СПб.: Лань, 2007. - 320 с.

98. Соловьев, И.А. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: Учебное пособие / И.А. Соловьев, В.В. Шевелев, А.В. Червяков и др. - СПб.: Лань, 2009. - 320 с.

99. Солодовников, А.С. Математика в экономике: Учебник Ч.2. Математический анализ / А.С. Солодовников и др. - М.: Финансы и статистика, 2011. - 560 с.

100. Спивак, М. Математический анализ на многообразиях: Учебное пособие / М. Спивак. - СПб.: Лань, 2005. - 160 с.

101. Филимоненкова, Н.В. Множества и отображения. Интенсивное введение в математический анализ для студентов технических вузов: Учебное пособие / Н.В. Филимоненкова, П.А. Бакусов. - СПб.: Лань, 2017. - 180 с.

102. Фольмут, Х. Математика в экономике. Ч.2. Математический анализ: Учебник / Х. Фольмут. - М.: Финансы и статистика, 2011. - 560 с.

103. Шахмейстер, А.Х. Введение в математический анализ. / А.Х. Шахмейстер. - М.: МЦНМО, 2015. - 792 с.

104. Шахмейстер, А.Х. Введение в математический анализ / А.Х. Шахмейстер. - М.: МЦНМО, 2009. - 792 с.

105. Шерстнев, А.Н. Математический и функциональный анализ: Конспект лекций / А.Н. Шерстнев. - М.: Ленанд, 2018. - 376 с.

106. Шершнев, В.Г. Математический анализ: сб. задач с реш.: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: Инфра-М, 2017. - 736 с.

107. Шершнев, В.Г. Математический анализ: сборник задач с решениями: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ Инфра-М, 2013. - 164 с.

108. Шершнев, В.Г. Математический анализ: Учебное пособие / В.Г. Шершнев. - М.: Инфра-М, 2019. - 64 с.

109. Шилов, Г. Математический анализ. Функции одного переменного: Учебное пособие / Г. Шилов. - СПб.: Лань, 2002. - 880 с.

110. Шипачев, В.С. Математический анализ. Теория и практика. / В.С. Шипачев. - М.: Высшая школа, 2009. - 350 с.

111. Шипачев, В.С. Математический анализ. Теория и практика: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - М.: Инфра-М, 2018. - 416 с.

112. Шубин, М.А. Математический анализ для решения физических задач / М.А. Шубин. - М.: МЦНМО, 2003. - 40 с.