КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ДВУЯЗЫЧНОЙ (ТАТАРСКО-РУССКОЙ) ОСНОВЕ: ЧАСТЬ 1

практикум

ИКЕТЕЛЛЕ (ТАТАРЧА-РУСЧА) НИГЕЗДӘ ПЕДАГОГИКА ЮНӘЛЕШЕ БУЕНЧА УКУЧЫ СТУДЕНТЛАР ӨЧЕН ЮГАРЫ МАТЕМАТИКА: 1-нче ӨЛЕШ

практикум

КАЗАНЬ

2024

УДК
БКК

Рецензент:
физика-математика фәннәре докторы, профессор Н.К Туктамышов;

Китап Татарстан Республикасы дәүләт телләрен һәм Татарстан Республикасында башка телләрне саклау, өйрәнү һәм үстерү буенча Татарстан Республикасы дәүләт программасын үтәү максатында нәшер ителә.

Салехова Л.Л., Зарипова Р.Р., Данилов А.В.

«Югары математика. 1-нче өлеш». Практикум./Л.Л. Салехова, Р. Р. Зарипова. А.В. Данилов —Казан : 2024.— 70 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-1627-9

Практикум «Югары математика. 1-нче өлеш» исемле уку-методик комплектның бер өлеше булып тора, ул ике телле (татарча-русча) нигезендә педагогика юнәлешендә укучы студентлар өчен тәгаенләнгән.

Уку ярдәмлегендә күплекләр теориясе, комплекс саннар һәм арифметик вектор пространствосы буенча теоретик материал тәкъдим ителә.

Практикум уку ярдәмлегенең барлык бүлекләре буенча һәр студентның мөстәкыйль эшләве өчен индивидуаль биремнәрне үз эченә ала.

ЭЧТӘЛЕК

КЕРЕШ СҮЗ

Уку ярдәмлеге һәм практикум **«Югары математика. I бүлек»** исемле укыту-методик комплектны тәшкил итә. Алар математиканы ике телдә (татарча-русча) өйрәнүче студентлар өчен төзелгән.

Практикумның эчтәлеге профессиональ билингваль компетенция формалаштыруга, киләчәктәге математика укытучыларының мәсьәләләрне мөстәкыйль чишү процессында белемнәрен, күнекмәләрен һәм осталыкларын үстерүгә юнәлтелгән.

Практикум дүрт бүлектән тора:

1. Беренче бүлектә студентлар өчен күплекләр теориясе һәм логика буенча мөстәкыйль эшләү өчен биремнәр тәкъдим ителә.

2. Икенче бүлектә бинар бәйләнешләр һәм математик индукция методын куллану буенча мөстәкыйль эшләү өчен биремнәр тәкъдим ителә.

3. Өченче бүлектә «Арифметик векторлар пространствосы» темасы буенча мөстәкыйль эшләү өчен күнегүләр бирелгән.

4. Дүртенче бүлектә студентлар өчен комплекс саннар буенча мөстәкыйль эшләү өчен биремнәр тәкъдим ителә.

Без практикумны әзерләүдә зур ярдәм күрсәткән студентларыбызга олы рәхмәтләребезне белдерәбез.

Китапта математика өлкәсендә танылган галимнәр турында тарихи мәгълүмат бирелгән, алар укыту әсбабында карала торган математик теорияләрнең үсешенә зур өлеш керткәннәр. Бу мәгълумат студентларга математика тарихы һәм аның үсеше белән танышырга, шулай ук фәнни эшчәнлекнең әһәмиятен аңларга булыша.

Бу укыту-методик комплект милли математик белем бирүне үстерү традицияләрен уңышлы дәвам итә. Аның нигезен Ләлә Исхак кызы Галиева, Мансур Зыятдин улы Хөснетдинов, Илдар Галәветдин улы Галәветдинов, Наил Кадыйр улы Туктамышов, Михаил Иванович Киндер һәм башка танылган педагог-галимнәр салган.

Авторлар- төзүчеләр.

1. КҮПЛЕКЛӘР ТЕОРИЯСЕ

Мәсьәлә 1.1

$A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, A \cup \bar{B}, \overline{A \cap B}$ күплекләрен геометрик рәвештә сурәтләгез:

1. $A = [1; 3], B = [-1; 2]$

2. $A = [0; 5], B = [-2; 1]$

3. $A = [-2; 3], B = [-1; 5]$

4. $A = [-1; 3], B = [-2; 2]$

5. $A = [1; 4], B = [2; 5]$

6. $A = [1; 5], B = [2; 6]$

7. $A = [0; 4], B = [3; 5]$

8. $A = [0; 3], B = [1; 4]$

9. $A = [-1; 4], B = [3; 6]$

10. $A = [-1; 2], B = [1; 3]$

11. $A = [-2; 2], B = [-1; 3]$

12. $A = [-2; 4], B = [2; 5]$

13. $A = [-1; 5], B = [-3; 2]$

14. $A = [-2; 5], B = [-4; 2]$

15. $A = [2; 4], B = [-1; 3]$

16. $A = [2; 5], B = [-2; 4]$

17. $A = [-2; 1], B = [-1; 3]$

18. $A = [-1; 1], B = [0; 3]$

19. $A = [0; 2], B = [-3; 1]$

20. $A = [-2; 0], B = [-1; 4]$

21. $A = [3; 5], B = [-2; 4]$

22. $A = [-3; -1], B = [-2; 3]$

23. $A = [-3; 0], B = [-1; 3]$

24. $A = [-3; 1], B = [-1; 4]$

25. $A = [-3; 2], B = [1; 3]$

Мәсьәлә 1.2

$A\cup(B\backslash C), A\backslash(B\cap C)$ күплекләрен xOy яссылыгында геометрик рәвештә сурәтләгез:

1. $A=(x,y)|x^2+y^2\leq 1$

$B=(x,y)|x^2+y^2\leq 4$

$C=(x,y)|x\geq y^2$

2. $A=(x,y)|x^2+y^2\geq 1$

$B=(x,y)|x^2+y^2\leq 4$

$C=(x,y)|x\leq y^2$

3. $A=(x,y)|x^2+y^2\leq 9$

$B=(x,y)|x^2+y^2\geq 4$

$C=(x,y)|y\leq -x^2$

4. $A=(x,y)|x^2+y^2\leq 4$

$B=(x,y)|x^2+y^2\geq 1$

$C=(x,y)|x\leq -y^2$

5. $A=(x,y)|x^2+y^2\leq 4$

$B=(x,y)|(x-2)^2+y^2\leq 1$

$C=(x,y)|x^2\geq y$

6. $A=(x,y)|x^2+(y-2)^2\geq 1$

$B=(x,y)|x^2+y^2\leq 4$

$C=(x,y)|x^2\leq y$

7. A $=\{(x,y)|(x+2)^2+y^2\geq 1\}$,

$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$,

$C=\{(x,y)|y\leq x^2\}$.

8. $A=(x,y)|y\leq x^2$,

$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$,

$C=\{(x,y)|x^2+(y+2)^2\leq 1\}$.

9. $A=(x,y)|1\leq x\leq 4, 1\leq y\leq 3$,

$B=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4)$,

$C = (x, y)|x + y \leq 0.$

10. $A = (x, y)| - 4 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 3,$

$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \geq 4\},$

$C = (x, y)|x \leq y.$

11. $A = \{(x, y)|y \leq -x),$

$B = (x, y)|3 \leq x, y \leq -1,$

$C = (x, y)|x^2 + y^2 \geq 4.$

12. $A = (x, y)|x^2 + y^2 \leq 4,$

$B = (x, y)|y \leq x,$

$C = (x, y)|1 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq -1.$

13. $A = (x, y)|x \in R, 1 \leq y \leq 3$

$B = (x, y)|x^2 + y^2 \leq 4$

$C = (x, y)|x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$

14. $A = (x, y)|(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$

$B = (x, y)|1 \leq x \leq 3, y \in R$

$C = (x, y)|x^2 + y^2 \geq 4$

15. $A = (x, y)|x^2 + y^2 \geq 4$

$B = (x, y)|x^2 + (y + 1)^2 \leq 1$

$C = (x, y)|x \in R, -3 \leq y \leq -1$

16. $A = (x, y)|1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3$

$B = (x, y)|(x + 1)^2 + y^2 \geq 1$

$C = (x, y)|x^2 + y^2 \leq 4$

17. $A = (x, y)|(x + 1)^2 + y^2 \leq 4$

$B = (x, y)|(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$

$C = (x, y)|x^2 \leq y$

18. $A = (x, y)|x^2 + (y - 1)^2 \leq 4$

$B = (x, y)|x^2 + (y + 1)^2 \leq 4$

$C = (x, y)|y^2 \leq x$

19. $A = (x, y)|y \geq x,$

$B = \{(x, y)|(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

$C = \{(x, y)|(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 9$

20. $A = \{(x, y)|y \leq -x\}$,

$B = \{(x, y)|(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

$C = \{(x, y)|(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 9$

21. $A = \{(x, y)|y \leq x\}$,

$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4\}$,

$C = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0\}$.

22. $A = \{(x, y)|y \geq x\}$,

$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$C = \{(x, y)|x \leq 0, y \geq 0\}$.

23. $A = \{(x, y)|y \geq -x\}$,

$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$,

$C = \{(x, y)|x \leq 0, y \leq 0\}$.

24. $A = \{(x, y)|y \leq -x\}$,

$B = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 4\}$,

$C = \{(x, y)|x \geq 0, y \leq 0\}$.

25. $A = (x, y)|x^2 + y^2 \leq 1$,

$B = (x, y)|(x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1$,

$C = (x, y)|y \leq x$.

Мәсьәлә 1.3

Күплекләрнең тигез булуын исбатлагыз:

1. $(\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$,

$A \backslash B = (A \backslash B) \backslash B$,

$(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

2. $\bar{A} \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A}$,

$A \backslash B = (A \cup B) \backslash B$,

$(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

3. $A\backslash\bar{B} = (\bar{A} \cup B) \cap A,$

$\bar{A} \cup \bar{B} = B \cup (\overline{A\backslash B}),$

$(A \cap B)\backslash C = (A \cap B)(A \cap C).$

4. $A\backslash B = A(A \cap B),$

$A \cap B = (B\backslash\bar{A}) \cap A,$

$(A \cap B)\backslash C = (A \cap B)(B \cap C).$

5. $B\backslash A = (A \cup B)\backslash A,$

$A \cap B = (\bar{A} \cup B) \cap A,$

$(A\backslash B) \cap C = (A \cap C)(B \cap C).$

6. $B\backslash A = B(A \cap B),$

$A \cup B = (\bar{A} \cap B) \cup A,$

$(A\backslash B) \cup C = (A \cup C)(B\backslash C).$

7. $B\backslash A = (A \cup B) \cap \bar{A},$

$A \cap B = (A\backslash\bar{B})\backslash\bar{B},$

$A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)(A \cap C).$

8. $\bar{A} \cup B = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup B,$

$A \cap B = B(\bar{A}\backslash\bar{B}),$

$A(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C).$

9. $B\backslash\bar{A} = (\bar{A} \cup B) \cap A,$

$A \cap B = (B\backslash\bar{A})\backslash\bar{A},$

$A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C).$

10. $A \cap \bar{B} = (A \cup B) \cap \bar{B},$

$\bar{B}\backslash\bar{A} = (A\backslash B) \cap A,$

$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B)\backslash(C\backslash B).$

11. $A \cup \bar{B} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup A,$

$\overline{B\backslash A} = (A \cap B) \cup \bar{B},$

$A(B \cup C) = (A\backslash C)(B\backslash C).$

12. $A \cap B = B(B\backslash A),$

$\overline{B\backslash A} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup A,$

$A(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C).$

13. $\bar{A} \cup B = (A \cap B) \cup \bar{A},$

$\bar{B}\backslash A = (A \cup \bar{B}) \cap \bar{A},$

$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash C)(B\backslash C).$

14. $A \cap \bar{B} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A,$

$\overline{B\backslash \bar{A}} = (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A},$

$(A\backslash B)\backslash C = (A\backslash B) \cap (A\backslash C).$

15. $A \cap B = A(A \cap \bar{B}),$

$A \cup B = A \cup (B\backslash A),$

$A \cap (B\backslash C) = (A\backslash C) \cap (B\backslash C).$

16. $A \cap B = (A \cup \bar{B})\backslash \bar{B},$

$A \cup B = B \cup (A\backslash B),$

$A(B \cup C) = (A\backslash B)(C\backslash B).$

17. $A \cap B = B(B \cap \bar{A}),$

$A \cup B = A \cup (\bar{A}\backslash \bar{B}),$

$A \cup (B\backslash C) = (A \cup B)(C\backslash A).$

18. $\bar{A} \cap B = (A \cup B) \cap \bar{\mathrm{A}},$

$\overline{A\backslash \bar{B}} = (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A},$

$(A\backslash C)\backslash B = (A\backslash B) \cap (A\backslash C).$

19. $A \cap B = (\bar{A} \cup B)\backslash \bar{A},$

$A \cup B = B \cup (\bar{B}\backslash \bar{A}),$

$\mathrm{A}(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash \bar{C}).$

20. $A \cap B = A(A\backslash B),$

$\bar{A}\backslash \bar{B} = (A \cup B) \cap \bar{A},$

$A \cap (B\backslash C) = (A \cap B)\backslash C.$

21. $A \cap B = (A\backslash \bar{B})\backslash \bar{B},$

$A\backslash B = (A \cup B) \cap \bar{B},$

$(A\backslash B) \cap C = (A \cap C)\backslash B.$

22. $A \cap B = A(\bar{B}\backslash \bar{A}),$

$\overline{B\backslash A} = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup A,$

$(A\backslash B)\backslash C = A(B \cup C).$

23. $A\backslash B = (A\backslash B) \cap A,$

$A \cap B = (A\backslash B)\backslash \bar{A},$

$(A\backslash B) \cap C = (C\backslash B) \cap A.$

24. $A\backslash B = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap A,$

$A \cup \bar{B} = A \cup (\overline{B\backslash A}),$

$(A\backslash C)\backslash B = A(B \cup C).$

25. $\overline{A\backslash B} = (A \cap B) \cup \bar{A},$

$A \cap B = (A\backslash \bar{B}) \cap B,$

$\mathrm{A}(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (C\backslash \bar{A}).$

Мәсьәлә 1.4

$A \times B, B \times A, A \times (B \cup C), C \times (A\backslash B)$ күплекләрен геометрик рәвештә сурәтләгез (биредә $A, B - 1.1$ мәсьәләсендәге интерваллар, $C = \boldsymbol{R}$**).**

Мәсьәлә 1.5

Күплекләрнең тигезлеген исбатлагыз:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. $A \times (B\backslash C) = (A \times B)(A \times C)$

4. $(A\backslash B) \times C = (A \times C)(B \times C)$

5. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

6. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

7. $(A \cap \bar{B}) \times C = (A \times C)(B \times C)$

8. $A \times (B \cap \bar{C}) = (A \times B)(A \times C)$

9. $(A\backslash B) \times C = (A \times C) \cap (\overline{B \times C})$

10. $A \times (B\backslash C) = (A \times B) \cap (\overline{A \times C})$

11. $(A \cap B) \times C = (A \times C)(\overline{B \times C})$

12. $A \times (B \cap C) = (A \times B)(\overline{A \times C})$

13. $(A \cap \bar{B}) \times C = (A \times C) \cap (\overline{B \times C})$

14. $A \times (B \cap \bar{C}) = (A \times B) \cap (\overline{A \times C})$

15. $(A \cap B) \times C = (B \times C) \cap (\overline{A \times C})$

16. $A \times (B \cap C) = (A \times C)(\overline{A \times B})$

17. $(\overline{A \cup B}) \times C = (\bar{A} \times C) \cap (\overline{B \times C})$

18. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

19. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \cap (A \times \bar{C})$

20. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \cap (\bar{B} \times C)$

21. $(A \cap B) \times (A \cap C) = (A \times A) \cap (B \times C)$

22. $A \times (\overline{B \cup C}) = (A \times \bar{C}) \cap (\overline{A \times B})$

23. $(\overline{A \cup B}) \times C = (\bar{B} \times C) \cap (\overline{A \times C})$

24. $(A \cap C) \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (C \times C)$

25. $A \times \overline{B \cup C} = (A \times \bar{B}) \cap (\overline{A \times C})$

2. БИНАР БӘЙЛӘНЕШЛӘР

Мәсьәлә 2.1

$A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешен графлар ярдәмендә сурәтләгез һәм аның үзлекләрен ачыклагыз, билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

1. $R = \{(1;1), (1;3), (2;2), (2;4), (3;1), (3;3), (4;2), (4;4)\}$

2. $R = \{(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3), (4;4)\}$

3. $R = \{(1;1), (1;4), (2;2), (3;2), (3;3), (4;1), (4;4)\}$

4. $R = \{(1;2), (1;3), (2;1), (2;4), (3;1), (3;4), (4;2), (4;3)\}$

5. $R = \{(1;1), (1;3), (2;2), (3;1), (3;3), (3;4), (4;3), (4;4)\}$

6. $R = \{(1;2), (1;3), (2;2), (2;3), (3;2), (3;3), (4;2), (4;3)\}$

7. $R = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2), (3;3), (3;4), (4;3), (4;4)\}$

8. $R = \{(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3), (2;4), (3;4)\}$

9. $R = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2), (4;4)\}$

10. $R = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2), (2;3), (3;2), (3;3), (4;4)\}$

11. $R = \{(1;1), (1;2), (2;1), (2;2), (3;3), (3;4), (4;4)\}$

12. $R = \{(1;1), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;3), (4;1), (4;3)\}$

13. $R = \{(1;1), (1;4), (2;2), (2;3), (3;2), (3;3), (4;1), (4;4)\}$

14. $R = \{(1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (3;2), (3;3), (3;4), (4;2)\}$

15. $R = \{(1;1), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (4;4)\}$

16. $R = \{(1;1), (1;3), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3), (4;4)\}$

17. $R = \{(1;\ 1), (1;\ 3), (2;\ 2), (2;\ 4), (3;\ 1), (3;\ 3), (4;\ 4)\}$

18. $R = \{(1;1), (1;4), (2;\ 1), (2;4), (3;\ 1), (3;\ 4), (4;\ 1), (4;\ 4)\}$.

19. $R = \{(1;\ 2), (1;\ 4), (2;\ 1), (2;\ 3), (3;\ 2), (3;\ 4), (4;\ 1), (4;\ 3)\}$.

20. $R = \{(1{:}\,1), (1;\ 2), (1;\ 3), (2;\ 2), (3;\ 2), (4;\ 1), (4;\ 2), (4;\ 3)\}$.

21. $R = \{(1;\ 2), (1;\ 4), (2;\ 1), (2;\ 2), (2;\ 4), (3;\ 3), (4;\ 1), (4;\ 2)\}$.

22. $R = \{(1;\ 1), (1;\ 4), (2;\ 2), (3;\ 3), (3;\ 4), (4;\ 1), (4;\ 3), (4;\ 4)\}$.

23. $R = \{(1;1), (1;\ 4), (2;\ 2), (2;\ 3), (3;\ 2), (3;\ 3), (4;\ 4)\}$.

24. $R = \{(1;1), (1;\ 2), (2;1), (2;\ 2), (3;\ 1), (3;\ 2), (4;\ 1), (4;\ 2)\}$.

25. $R = \{(1;\ 3), (1;\ 4), (2;\ 3), (2;\ 4), (3;\ 1), (3;\ 2), (4;\ 1), (4;\ 2)\}$.

Мәсьәлә 2.2

R күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешнең графигын сызыгыз һәм аның үззлекләрен ачыклагыз, билгеләнү һәм кыйммәтләре өлкәләрен табыгыз.

1. $R = \{(x,\mathrm{y}) \| x - \mathrm{y}| \leq 1\}$.

2. $R = \{(x,\mathrm{y}) | x \cdot \mathrm{y} \geq 0\}$.

3. $R = \{(x,y) | (x - 1)(y - 1) \geq 0\}$.

4. $R = \{(x,\mathrm{y}) | x^2 = \mathrm{y}^2\}$.

5. $R = \{(x,\mathrm{y}) \| x| \geq \mathrm{y} \geq 0\}$.

6. $R = \{(x,\mathrm{y}) | x \cdot \mathrm{y} > 0\}$.

7. $R = \{(x,\mathrm{y}) | x^2 + x = \mathrm{y}^2 + \mathrm{y}\}$.

8. $R = \{(x,y) | -1 < x - y \leq 0\}$.

9. $R = \{(x,\mathrm{y}) | (x+1)(\mathrm{y}+1) \geq 0\}$.

10.$R = \{(x,\mathrm{y}) \| \mathrm{y}| < x\}$.

11.$R = \{(x,y) | x \geq 0$ һәм $y \geq 0\}$.

12.$R = \{(x,\mathrm{y}) | x \cdot \mathrm{y} \leq 0\}$.

13.$R = \{(x,\mathrm{y}) \| x| \geq |\mathrm{y}|\}$.

14.$R = (x,y) | y = sinx$

15.$R = (x,y) | \mathrm{y} = x^2$.

16.$R = (x,y) | y = cosx$.

17.$R = (x,y) || x - 1| < y - 1$.

18.$R = (x,y) | x^2 + 4\mathrm{y}^2 \leq 1$.

19.$R = (x,y) | 1 \leq x \leq |\mathrm{y}|$.

20.$R = (x,y) | -2 \leq x - y \leq 2$.

21.$R = (x,y) || y + 1| \leq x + 1$.

22.$R = (x,y) | (x - y)^2 = x - y$.

23.$R = (x,y) | x^2 + 4x = \mathrm{y}^2 + 4y$.

24.$R = (x,y) | x^2 + \mathrm{y}^2 \leq 1$.

25.$R = (x,y) | x \cdot \mathrm{y} > 0$.

Мәсьәлә 2.3

A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешнең узлекләрен ачыклагыз.

1. $R = \left\{(x,y) \middle| \frac{x}{y} \in Z\right\}, A = \frac{\boldsymbol{R}}{\{0\}}$.
2. $R = (x,y)|x - y \in \boldsymbol{N}, A = \boldsymbol{R}$.
3. $R = \{(x,y)|x, y$ – жөп саннар$\}$, $A = \boldsymbol{Z}$.
4. $R = \{(x,y)|[x] \leq [y]\}, A = \boldsymbol{R}$
5. $R = \{(x,y)|0 \leq x - y < 1), A = \boldsymbol{R}$.
6. $R = \{(x,y)|x^3 + x \leq y^3 + y), A = \boldsymbol{R}$.
7. $R = \{(x,y)|sinx \leq siny), A = \boldsymbol{R}$.
8. $R = \left\{(x,y) \middle| \frac{x^2}{y^2} \leq 1\right\}, A = \frac{\boldsymbol{R}}{\{0\}}$
9. $R = \{(x,y)|x - y \in R\}, A = \boldsymbol{Z}$
10. $R = \{(x,y)x, y$ — так саннар$\}$, $A = \boldsymbol{Z}$
11. $R = \{(x,y)|(x - y) \vdots 2\}, A = \boldsymbol{Z}$.
12. $R = \{(x,y)|(x - y)^2 \in \boldsymbol{Z}), A = \boldsymbol{R}$.
13. $R = \{(x,y)|\cos x \leq \cos y), A = \boldsymbol{R}$.
14. $R = \left\{(x,y)\middle|\{x\} < \{y\}\right\}, A = \boldsymbol{R}$.
15. $R = \{(x,y)|(x - y)^2 + 1 \in N), A = \boldsymbol{R}$.
16. $R = (x,y)|0 < cosy \cdot cosy, A = \boldsymbol{R}$.
17. $R = \{(x,y)|S(x) = S(y)\}, A$ – барлык өчпочмаклар күплеге. (Биредә $S(x)$– x өчпочмагының мәйданы.)
18. $R = \{(x,y)|x - y + 1 \in N), A = \boldsymbol{R}$.
19. $R = \{(x,y)|x_1 \leq y_1\}, x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2,)$, A – яссылыктагы векторлар күплеге.
20. $R = \{(x,y)||x| \leq |y|\}$, A – яссылыктагы барлык векторлар.
21. $R = (x,y)|S(x) \leq S(y), A$ –барлык өчпочмаклар күплеге.($S(x) - x$ өчпочмагының мәйданы.)
22. $R = \{(x,y)|0 \leq sin\, x \cdot sin\, y), A = \boldsymbol{R}$.
23. $R = \{(x,y)|x$ һәм y турылары кисешә), A - яссылыктагы барлык

турылар.

24. $R = \{\{X, Y\} | X$ һәм Y дәүләтләренең уртак чиге бар$\}$, A $-$ барлык дәүләтләр күплеге.

25. $R = (\mathrm{x}, y) \left| \frac{\mathrm{x}-\mathrm{y}}{2} \in \boldsymbol{Z}, A = \boldsymbol{R} \right.$

Мәсьәлә 2.4

А куплегендә бирелгән R бинар бәйленешенең эквивалентлык бәйленеше икәнлеген исбатлагыз. a һәм b элементлары ярдәмендә төзелгән эквивалентлык классларын табыгыз.

1. 1) $R = \{(x, y) | (x - y) \vdots 5\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1.$

2) $R = \{(x, y) | \mathrm{x} \cdot y > 0\}, A = \boldsymbol{R}/\{0), a = 1, b = -1.$

2. 1) $R = \{(x, y) | (x + y) \vdots 2), A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1.$

2) $R = \{(x, y) | [x] = [y]\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = 1.$

3. 1) $R = \{(x, y) | \sin x = \sin y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = 1$

2) $R = \{(x, y) | (x - y)(xy + 1) = 0\}, A = \boldsymbol{R} / \{0\}, a = 1, b = 2$

4. 1) $R = \{(x, y) | (x^2 - y^2) \vdots 2\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = 1$

2) $R = \{(x, y) | sin(x - y) = 0\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

5. 1) $R = \{(x, y) | x^2 + x = y^2 + y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -\frac{1}{2}$

2) $R = \{(x, y) | (x - 1) \cdot (y - 1) > 0\}, A = \boldsymbol{R} /\{1\}, a = 0, b = 2$

6. 1) $R = \left\{(x, y) \left| \frac{x}{y} \in Q \right.\right\}, A = \boldsymbol{R} / \{0\}, a = 1, b = \sqrt{2}$

2) $R = \{(x, y) | x = y$ яки $x + y = 1\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -1$

7. 1) $R = \{(x, y) | 2\,(x - y) \in Z\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{1}{3}$

2) $R = \left\{(x, y) \left| \frac{x}{y} > 0 \right.\right\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -1$

8. 1) $R = \left\{(x, y) \left| \left[\frac{x}{2}\right] = \left[\frac{y}{2}\right] \right.\right\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -3$

2) $R = \{(x, y) | \cos x = \cos y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{\pi}{2}$

9. 1) $R = \{(x, y) | [x] - [y] \vdots 2\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = 1$

2) $R = \left\{(x,y) \left| \frac{x+1}{y+1} > 0\right.\right\}, A = \boldsymbol{R}/\{-1\}, a = 0, b = -2$

10. 1) $R = \{(x,y) \mid (x^2 + y^2) \vdots 2\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1$

2) $R = \{(x,y) \mid \cos(x-y) = 1\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -\frac{\pi}{2}$

11. 1) $R = \{(x,y) \mid (x^2-1)(y^2-1) > 0\}, A = \boldsymbol{R}/\{-1;1\}, a = 0, b = 2$

2) $R = \{(x,y) \mid (x + 4y) \vdots 5\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1$

12. 1) $R = \{(x,y) \mid \sin 2x = \sin 2y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{\pi}{4}$

2) $R = \{(x,y) \mid \sin 2x = \sin 2y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -1$

13. 1) $R = \{(x,y) \mid 2x + 5y \vdots 7\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = -1.$

2) $\{(x,y) \mid x - y$ векторы O_y кучәренә параллель$\}$, $A -$ яссылыгындагы векторлар күплеге, $a = (0;1), b = (2;1)$.

14. 1) $R = \{(x,y) \mid |x| = |y|\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1$

2) $R = \{(x,y) \mid [\sin x] = [\sin y]\}, A = \boldsymbol{R}, a = \frac{\pi}{2}, b = -\frac{\pi}{2}$

15. 1) $R = \{(x,y) \mid (x+1)(y+1) > 0\}, A = \boldsymbol{R}/\{-1\}, a = 0, b = -2$

2) $R = \{(x,y) \mid (x^2 - y^2) \vdots 3\}, A = \mathbf{Z}, a = 0, b = 1$

16. 1) $R = \{(x,y) \mid (x^2 - 4)(y^2 - 4) > 0\}, A = \boldsymbol{R}/\{-2;2\},$
$a = 0, b = -3.$

2) $R = \{(x,y) \mid [\cos x] = [\cos y]\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = -\frac{\pi}{2}.$

17. 1) $R = \{(x,y) \mid |2x + 1| = |2y + 1|\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1.$

2) $R = \{(x,y) \mid [x] - [y] \vdots 3\}, A = \boldsymbol{R}, a = 1, b = 1.$

18. 1) $R = \{(x,y) \mid x^2 - x = y^2 - y\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{1}{2}.$

2) $R = \{(x,y) \mid x - y$ векторы O_x кучәренә параллель$\}$, $A - xOy$ яссылыгындагы векторлар күплеге, $a = (1;0), b = (2;1)$.

19. 1) $R = \{(x,y) \mid [x] - [y] \vdots 4\}, A = R, a = 0, b = -1.$

2) $R = \{(x,y) \mid \cos 2x = \cos 2y\}, A = R, a = 0, b = 5.$

20. 1) $R = \{(x,y) \mid (x-1)(y-1) > 0\}, A = \boldsymbol{R}/\{1\}, a = 0, b = 2.$

2) $R = \{(x,y) \mid (2x + 3y) \vdots 5\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1.$

21. 1) $R = \{(x, y) \mid \{x\} = \{y\}\}, A = \boldsymbol{R}, a = 0, b = \frac{1}{3}.$

2) $R = \{(x, y) \mid x$ һәм y саннарынын унарлы язылышлары бер ук цифрдан башлана$\}$, $A = \{n \in \boldsymbol{N} \mid 1 \le n \le 99\}, a = 10, b = 20.$

22. 1) $R = \{(x, y) \mid (x^3 + y^3) \vdots 2\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = -1.$

2) $R = \{(x, y) \mid x$ һәм y нокталары O_y кучәренннән тигез ераклыкта ята$\}$, $A = xO_y$ яссылыгындагы барлык нокталар куплеге, $a = (1;\ 0), b = (0;\ 0).$

23. 1) $R = \{(x, y) \mid (x^3 - y^3) \vdots 3\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = 1.$

2) $R = \{(x, y) | x$ һәм y саннарынын унарлы язылышлары бер ук цифрга тәмамлана$\}$,$A = (n \in \boldsymbol{N} | 1 \le n \le 99), a = 1, b = 10.$

24. 1) $R = \{(x, y) | (3x + 4y) \vdots 7\}, A = \boldsymbol{Z}, a = 0, b = -1.$

2) $R = \{(x, y) | x$ һәм у нокталары O_x кучәренннән тигез ераклыкта ята$\}$, $A - xO_y$ яссылыгындагы нокталар күплеге, $a = (0; 1), b = (0; 0).$

25. 1) $R = \left\{(x, y) \middle| \left[\frac{x}{3}\right]] = \left[\frac{y}{3}\right]\right\}, A = \boldsymbol{Z}\ a = 0, b = -1.$

2) $R = \{(x, y) | x$ һәм у нокталары $(0; 0)$ ноктасыннан тигез ераклыкта ята$\}$, $A - xO_y$ яссылыгындагы нокталар күплеге, $a = (0; 1), b = (0; 0).$

Мәсәлә 2.5

R бинар бәйләнеше *A* күплегендә һәм *B* күплегендә тәртип бәйләнеше буламы? Әгәр *R* тәртип бәйләнеше булса, аның төрен ачыклагыз. (1 нче мисалда *A* = {1; 2; 3; 4}.)

1. 1) $R = \{(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (3; 4), (4; 4)\}$

2) $R = \{(x, y) \mid \sin x \le \sin y\}, A = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], B = [0;\ \pi]$

2. 1) $R = (1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 4), (3; 3), (3; 4)$

2) $R = \{(x, y) \mid x^2 + x \le y^2 + y\}, A = \boldsymbol{R}^+, B = \boldsymbol{R}$

3. 1) $R = \{(1;1),(1;2),(1;4),(2;2),(2;4),(3;3),(3;4),(4;4)\}$

2) $R = (x,y)|[x] < [y], A = \boldsymbol{R}, B = \boldsymbol{Z}$

4. 1) $R = \{(1;1),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4),(3;3),(4;4)\}$

2) $R = \{(x,y) \mid X = \emptyset\}, A -$ универсаль күплекнең барлык күплекчәләре

5. 1) $R = \{(1;1),(1;3),(2;1),(2;3),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3)\}$

2) $R = \{(x,y) \mid (x+1) \vdots (y+1)\}, A = \boldsymbol{N}, B = \boldsymbol{Z}$

6. 1) $R = \{(1;1),(1;4),(2;2),(2;4),(3;1),(3;3),(3;4),(4;4)\}$.

2) $R = \left\{(x,y) \left| \frac{x}{y} \geq 1 \right.\right\}, A = \boldsymbol{R}\backslash\{0\}, B = \boldsymbol{R}$

7. 1) $R = \{(1;2),(1;3),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4)\}$

2) $R = \{(x,y) \mid \cos x \leq \cos y\}, A = [0;\pi], B = [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

8. 1) $R = (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)$

2) $R = \{(x,y)|x^2 - 2x \leq y^2 - 2y\}, A = (1;+\infty], B = \boldsymbol{R}$

9. 1) $R = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4),(4;3)\}$

2) $R = \{(x,y) \mid \{x\} \leq \{y\}\}, A = \boldsymbol{R}, B = [0;1]$

10. 1) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$

2) $R = \{(x,y)|x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2\}, x = (x_1,x_2), y = (y_1,y_2)$, A – xO_y яссылыгындагы векторлар күплеге, B – xO_y яссылыгының x = y турысында яткан векторлар күплеге.

11. 1) $R = \{(1;4),(2;1),(2;2),(2;4),(3;1),(3;2),(3;3),(8;4)\}$.

2) $R = \{(x,y)|x \vdots y), A = \boldsymbol{Z}, B = \boldsymbol{N}$.

12. 1) $R = \{(1;1),(1;4),(2;2),(2;3),(2;4),(3;3),(3;4),(4;4)\}$.

2) $R = \left\{(x,y) \left| \frac{x-1}{y-1} \geq 1 \right.\right\}, A = \boldsymbol{R}\backslash\{1\}, B = \boldsymbol{R}$

13. 1) $R = \{(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;3),(3;4)\}$.

2) $R = \{(x,y)|\mathrm{tg}\, x \leq \mathrm{tg}\, y\},\ A = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), B = \left[0;\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

14. 1) $R = \{(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;3),(3;4)\}$.

2) $R=\left\{(x,y)\,\middle|\frac{x}{y}\in\boldsymbol{N}\right\}, A=\boldsymbol{R}\backslash\{0\}, B=\{2^n|\ n\ \in\boldsymbol{Z}\}$

15. 1) $R=\{(1;4),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;3),(3;4)\}$.

2) $R=\{(x,y)|[x]<[y]\}, A=\boldsymbol{R}, B=\boldsymbol{Z}$.

16. 1) $R=\{(1;1),(1;2),(1;4),(2;2),(3;2),(3;3),(4;2),(4;4)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)|x_1<y_1\}$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $A-xOy$ яссылыгындагы векторлар күплеге, $B-Ox$ күчәрендәге векторлар күплеге.

17. 1) $R=\{(1;1),(1;2),(1;4),(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(4;2)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)|S(x)<S(y)\}, A\ -$ барлык өчпочмаклар күплеге, $B-$ тигезьяклы өчпочмаклар күплеге. $S(x)-x$ өчпочмагының мәйданы).

18. 1) $R=\{(1;1),(1;3),(1;4),(2;2),(2;4),(3;3),(3;4),(4;4)\}$.

2) $R=\left\{(x,y)|0<\frac{x}{y}\leq 1\right\}, A=\boldsymbol{R}\backslash\{0\}, B=\boldsymbol{R}$.

19. 1) $R=\{(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(3;1),(3;3),(3;4),(4;1)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)|ctg\ x<ctg\ y\}, A=(0;\pi), B=(-\pi;\pi)\backslash\{0\}$.

20. 1) $R=\{(1;1),(1;2),(2;2),(3;2),(3;3),(4;1),(4;2),(4;4)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)|x^2+2x\leq y^2+2y\}, A=[-1;+\infty], B=\boldsymbol{R}$.

21. 1) $R=\{(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)||x|\leq|y|\}, A=\boldsymbol{R}, B=\boldsymbol{R}^+$.

22. 1) $R=\{(1;1),(1;2),(1;3),(2;3),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4)\}$.

2) $R=\{(x,y)|x_2<y_2\}, x=(x_1,x_2), y=(y_1,y)A-xOy$ яссылыгындагы векторлар күплеге, $B-Oy$ күчәрендәге векторлар күплеге.

23. 1) $R=\{(1;1),(1;2),(2;2),(3;1),(3;2),(3;3),(4;2),(4;4)\}$.

2) $R\ =\{(x,y)||x|<|y|\}, A-xOy$ яссылыгындагы векторлар күплеге, $B-Ox$ күчәрендәге векторлар күплеге.

24. 1) $R=\{(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(4;1),(4;3),(4;4)\}$.

2) $R = \left\{(x,y) | \dfrac{x+1}{y+1} \geq 1\right\}, A = \boldsymbol{R} \backslash \{-1\}, B = \boldsymbol{R}.$

25. 1) $R = \{(1;1),(2;1),(2;2),(2;4),(3;1),(3;3),(4;1),(4;4)\}.$

2) $R = \left\{(x,y) | \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}\right\}, A = \boldsymbol{R} \backslash \{0\}, B = \boldsymbol{R}.$

3. Арифметик векторлар пространствосы

Мәсьәлә 3.1

$2a - 2b + c + 2x = 0$ шартыннан x векторын табыгыз.

1. $a = (2; -2; -5)$	$b = (1; 5; -3)$	$c = (3; 3; -7)$
2. $a = (-2; 2; 4)$	$b = (1; -3; 5)$	$c = (-1; -1; 1)$
3. $a = (2; -4; -4)$	$b = (5; 1; -3)$	$c = (7; -3; -5)$
4. $a = (-2; -4; 2)$	$b = (5; -3; 1)$	$c = (3; -7; 3)$
5. $a = (-4; -2; 2)$	$b = (-3; 1; 5)$	$c = (-7; -1; 7)$
6. $a = (-4; 2; -2)$	$b = (-3; 5; 1)$	$c = (-7; 7; -1)$
7. $a = (2; -4; 6)$	$b = (1; 3; 5)$	$c = (3; -1; 11)$
8. $a = (2; 6; -4)$	$b = (1; 5; 3)$	$c = (3; 11; -1)$
9. $a = (-4;\ 2;\ 6)$	$b = (3;\ 1;\ 1)$	$c = (-1;\ 3;\ 7)$
10. $a = (-4;\ 6;\ 2)$	$b = (3;\ 1;\ 5)$	$c = (-1;\ 7;\ 7)$
11. $a = (6;\ 2; -4)$	$b = (5;\ 1;\ 3)$	$c = (11;\ 3; -1)$
12. $a = (6; -4;\ 2)$	$b = (5;\ 3;\ 1)$	$c = (11; -1;\ 3)$
13. $a = (-2;\ 4;\ 6)$	$b = (-1;\ 5; -3)$	$c = (-3;\ 9; -9)$
14. $a = (-2; -6;\ 4)$	$b = (-1; -3;\ 5)$	$c = (-3; -9;\ 9)$
15. $a = (4; -2; -6)$	$b = (5; -1; -3)$	$c = (9; -3; -9)$
16. $a = (4; -6; -2)$	$b = (5; -3; -1)$	$c = (9; -9; -3)$
17. $a = (-6; -2;\ 4)$	$b = (-3; -1;\ 5)$	$c = (-9; -3; 9)$
18. $a = (-6;\ 4; -2)$	$b = (-3;\ 5; -1)$	$c = (-9;\ 9; -3)$
19. $a = (2;\ 4;\ 6)$	$b = (1; -5;\ 3)$	$c = (3;\ -1;\ 9)$
20. $a = (2;\ -2;\ 4)$	$b = (1;\ 3; -5)$	$c = (3;\ 1; -1)$
21. $a = (-2;\ 2;\ 4)$	$b = (-5;\ 1;\ 3)$	$c = (-7;\ 3;\ 7)$
22. $a = (-2;\ 4;\ 2)$	$b = (-5;\ 3;\ 1)$	$c = (-7;\ 7;\ 3)$
23. $a = (2;\ 4;\ -2)$	$b = (3;\ 1; -5)$	$c = (5;\ 5; -7)$
24. $a = (4;\ 2;\ -2)$	$b = (3; -5;\ 1)$	$c = (7; -3; -1)$
25. $a = (4;\ -2;\ 2)$	$b = (-3;\ 5;\ 3)$	$c = (1;\ 3;\ 5)$

Мәсьәлә 3.2

Бирелгән системаның рангын табыгыз, сызыкча бәйлелеген ачыклагыз. Сызыкча бәйле система өчен бу бәйлелекне табыгыз.

1. а) $a_1 = (1; -2;\ 0)$
$a_2 = (2; 1; -1)$
$a_3 = (1;\ 3; -1)$

б) $a_1 = (3; -1; -1)$
$a_2 = (1;\ 1;\ 2)$
$a_3 = (2;\ 3; -1)$

2. а) $a_1 = (-2;\ 1; 1)$
$a_2 = (3; 1; 2)$
$a_3 = (1;\ 2; 3)$

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 2)$
$a_2 = (2;\ 3; -1)$
$a_3 = (1;\ 2;\ 3)$

3. а) $a_1 = (3;\ 1; -1)$
$a_2 = (-1; 2; 1)$
$a_3 = (4;\ -1; -2)$

б) $a_1 = (2; -1; -2)$
$a_2 = (1;\ 2;\ 3)$
$a_3 = (2; -3;\ 2)$

4. а) $a_1 = (1;\ 2; 1)$
$a_2 = (1; -1; 3)$
$a_3 = (1;\ 5; -1)$

б) $a_1 = (2;\ 1;\ 2)$
$a_2 = (3;\ 2;\ 1)$
$a_3 = (4;\ 3;\ 2)$

5. а) $a_1 = (3;\ 2; -1)$
$a_2 = (1; -1; 1)$
$a_3 = (1;\ 4; -3)$

б) $a_1 = (3;\ 2;\ 1)$
$a_2 = (4;\ 3;\ 2)$
$a_3 = (1;\ 2;\ 3)$

6. а) $a_1 = (1;\ 2; -3)$
$a_2 = (2; 1; 2)$
$a_3 = (5;\ 1; 9)$

б) $a_1 = (2;\ -1;\ 3)$
$a_2 = (3;\ -1;\ -1)$
$a_3 = (3;\ -1;\ 3)$

7. а) $a_1 = (3;\ 1; -1)$
$a_2 = (2; 1; -2)$
$a_3 = (-1;\ 0; -1)$

б) $a_1 = (2;\ 3;\ 4)$
$a_2 = (1;\ 2;\ 0)$
$a_3 = (3;\ 2;\ 0)$

8. а) $a_1 = (3;\ 2; 1)$
$a_2 = (4; 3; 2)$
$a_3 = (1;\ 2; 3)$

б) $a_1 = (-2;\ 1;\ 3)$
$a_2 = (3;\ 2;\ 5)$
$a_3 = (1;\ 1;\ 2)$

9. а) $a_1 = (3;\ -1; 2)$

б) $a_1 = (2;\ 2;\ -1)$

$a_2 = (2; 1; 0)$

$a_3 = (1;\ 3; -2)$

10. а) $a_1 = (2;\ 2; 1)$

$a_2 = (1; 3; -2)$

$a_3 = (-1;\ 1; -3)$

$a_2 = (4;\ 3;\ -1)$

$a_3 = (3;\ 3;\ -2)$

б) $a_1 = (1;\ 1;\ 5)$

$a_2 = (2;\ 1;\ 3)$

$a_3 = (1;\ 1;\ 3)$

11. а) $a_1 = (3;\ 3; 2)$

$a_2 = (4; -1; 2)$

$a_3 = (1;\ -4; 0)$

б) $a_1 = (1;\ 5;\ 2)$

$a_2 = (1;\ 3;\ 2)$

$a_3 = (1;\ 3;\ 4)$

12. а) $a_1 = (3;\ 1; -3)$

$a_2 = (2; -1; 1)$

$a_3 = (1;\ 2; -4)$

б) $a_1 = (3;\ 4;\ 1)$

$a_2 = (3;\ 5;\ 3)$

$a_3 = (1;\ 1;\ 3)$

13. а) $a_1 = (2;\ 2; 3)$

$a_2 = (3; -1; 2)$

$a_3 = (1;\ 5; 4)$

б) $a_1 = (5;\ 3;\ 5)$

$a_2 = (8;\ 1;\ 5)$

$a_3 = (5;\ 3;\ 7)$

14. а) $a_1 = (-2;\ 1; 2)$

$a_2 = (3; 1; -2)$

$a_3 = (1;\ 2; 0)$

б) $a_1 = (2;\ 5;\ 4)$

$a_2 = (1;\ 3;\ 2)$

$a_3 = (2;\ 10;\ 9)$

15. а) $a_1 = (3;\ 1; -1)$

$a_2 = (2; 1; 2)$

$a_3 = (1;\ 1; 5)$

б) $a_1 = (5;\ 4;\ 1)$

$a_2 = (3;\ 2;\ 1)$

$a_3 = (8;\ 9;\ 2)$

16. а) $a_1 = (3;\ -3; 1)$

$a_2 = (4; 1; -2)$

$a_3 = (1;\ 4; -3)$

б) $a_1 = (2;\ -5;\ 1)$

$a_2 = (-3;\ 7;\ -1)$

$a_3 = (5;\ -9;\ 2)$

17. а) $a_1 = (4;\ 2; 1)$

$a_2 = (1; -2; -1)$

$a_3 = (2;\ 6; 3)$

б) $a_1 = (2;\ 1;\ 4)$

$a_2 = (1;\ 3;\ -6)$

$a_3 = (3;\ -2;\ 2)$

18. а) $a_1 = (3; 2; 3)$

$a_2 = (-1; 2; -2)$

$a_3 = (2; 4; 1)$

б) $a_1 = (3; -6; 2)$

$a_2 = (1; -1; 1)$

$a_3 = (1; -2; 0)$

19. а) $a_1 = (2; -2; 3)$ б) $a_1 = (3; -7; 1)$

$a_2 = (1; 2; -1)$ $a_2 = (5; -9; 2)$

$a_3 = (3; 0; 2)$ $a_3 = (4; -6; 1)$

20. а) $a_1 = (1; 3; 0)$ б) $a_1 = (1; -2; 6)$

$a_2 = (2; -1; 3)$ $a_2 = (2; 4; -9)$

$a_3 = (3; -5; 6)$ $a_3 = (1; 6; -3)$

21. а) $a_1 = (-1; 0; 2)$ б) $a_1 = (3; 2; 2)$

$a_2 = (1; -1; 1)$ $a_2 = (9; -8; 5)$

$a_3 = (3; -2; 0)$ $a_3 = (5; -8; 5)$

22. а) $a_1 = (-2; 2; 1)$ б) $a_1 = (1; 1; 1)$

$a_2 = (1; 3; -1)$ $a_2 = (8; -5; -10)$

$a_3 = (3; 1; -2)$ $a_3 = (-5; 4; 7)$

23. а) $a_1 = (-4; 3; 2)$ б) $a_1 = (3; -3; -5)$

$a_2 = (3; 1; 3)$ $a_2 = (3; -2; -4)$

$a_3 = (2; 5; 8)$ $a_3 = (-2; 5; 7)$

24. а) $a_1 = (-2; 1; 3)$ б) $a_1 = (2; -5; 4)$

$a_2 = (3; 2; 4)$ $a_2 = (3; -4; 7)$

$a_3 = (7; 0; -2)$ $a_3 = (4; -9; 8)$

25. а) $a_1 = (3; -1; 3)$ б) $a_1 = (2; -1; 4)$

$a_2 = (5; 2; 1)$ $a_2 = (1; 2; 3)$

$a_3 = (2; 3; -2)$ $a_3 = (4; 3; -2)$

Мәсьәлә 3.3

Векторлар системасының базисын һәм рангын табыгыз.

1. $a_1 = (2; 3; 1; 2)$ $a_2 = (0; 4; 2; 5)$

$a_3 = (1; 2; 3; 1)$ $a_4 = (3; 1; 2; -2)$

2. $a_1 = (4; 5; -3; 1)$ $a_2 = (-1; 1; -3; 1)$

$a_3 = (2; 1; -3; 1)$ $a_4 = (1; 5; -3; 1)$

3. $a_1 = (2; 0; 1; 3)$ $a_2 = (1; -1; 2; 9)$

$a_3 = (1; -1; 0; -1)$ $a_4 = (0; -2; 1; 5)$

4. $a_1 = (-3; 1; -5; 0)$ $a_2 = (-5; 7; 1; 4)$

$a_3 = (-1; 3; 3; -2)$ $a_4 = (-3; 5; 2; -3)$

5. $a_1 = (-3; 1; 5; 0)$ $a_2 = (1; 1; 3; 2)$

$a_3 = (-1; 3; 11; 4)$ $a_4 = (0; 4; 2; 5)$

6. $a_1 = (2; 3; 1; 2)$ $a_2 = (0; 4; 2; 5)$

$a_3 = (1; 2; 3; 1)$ $a_4 = (3; 1; 2; -2)$

7. $a_1 = (1; 2; 3; 1)$ $a_2 = (2; 3; 1; 2)$

$a_3 = (0; 2; 4; -4)$ $a_4 = (0; 4; 2; -12)$

8. $a_1 = (1; 1; -3; -2)$ $a_2 = (-3; 5; 2; 3)$

$a_3 = (-3; 1; 5; 0)$ $a_4 = (-5; 7; 4; 1)$

9. $a_1 = (-1; -2; 3; -2)$ $a_2 = (-2; 2; -1; -2)$

$a_3 = (-2; -1; 3; -1)$ $a_4 = (-2; 5; -4; 1)$

10. $a_1 = (-4; -22; -17; 0)$ $a_2 = (1; 3; 3; 0)$

$a_3 = (1; 7; 5; 0)$ $a_4 = (0; 2; 1; 0)$

11. $a_1 = (0; -3; 3; 2)$ $a_2 = (-1; -2; 0; -1)$

$a_3 = (2; 1; 2; 2)$ $a_4 = (1; 5; 0; 5)$

12. $a_1 = (-2; -16; -12; 6)$ $a_2 = (-1; 1; 0; 0)$

$a_3 = (-2; -4; -4; 2)$ $a_4 = (0; 3; 2; -1)$

13. $a_1 = (-10; -13; 13; -2)$ $a_2 = (2; 3; -3; 2)$

$a_3 = (8; 9; -9; -4)$ $a_4 = (-2; -2; 2; 2)$

14. $a_1 = (-4; -6; 0; -6)$ $a_2 = (0; 0; 2; 2)$

$a_3 = (1; 0; 2; 1)$ $a_4 = (-2; -3; 0; -3)$

15. $a_1 = (1; -2; -3; 2)$ $a_2 = (-1; 2; -2; -1)$

$a_3 = (0; 2; -2; -2)$ $a_4 = (-1; -2; -3; 4)$

16. $a_1 = (2; 3; 0; 0)$ $a_2 = (-1; 2; 3; 0)$

$a_3 = (0; -1; 0; -1)$ $a_4 = (1; 3; 3; -2)$

17. $a_1 = (-2; 3; 0; 1)$ $a_2 = (2; 1; -1; 0)$

$a_3 = (-2; -1; -1; 1)$ $a_4 = (2; -7; -3; 0)$

18. $a_1 = (2; 1; -1; -3)$ $a_2 = (0; 3; -2; 0)$

$a_3 = (-4; 4; -2; 6)$ $a_4 = (0; -3; 2; 0)$

19. $a_1 = (0; 2; 3; -3)$ $a_2 = (-2; 1; 3; -3)$

$a_3 = (-1; -1; -3; 1)$ $a_4 = (1; 0; -3; 1)$

20. $a_1 = (-1; -2; 2; 0)$ $a_2 = (-1; -2; 2; 0)$

$a_3 = (1; -3; 1; -1)$ $a_4 = (0; 10; -6; 11)$

21. $a_1 = (0; 4; -3; 2)$ $a_2 = (1; -2; 0; 2)$

$a_3 = (-1; -2; -1; 2)$ $a_4 = (0; 0; -2; 3)$

22. $a_1 = (0; 18; -12; 0)$ $a_2 = (-2; 3; -3; -2)$

$a_3 = (1; 3; -3; 0)$ $a_4 = (1; 3; 0; 2)$

23. $a_1 = (-1; -2; 6; 1)$ $a_2 = (1; 1; 3; 0)$

$a_3 = (2; 1; 1; -2)$ $a_4 = (-2; -4; 12; 2)$

24. $a_1 = (8; 1; 0; 17)$ $a_2 = (2; -2; 2; 3)$

$a_3 = (1; 2; 2; 2)$ $a_4 = (16; 2; 0; 34)$

25. $a_1 = (2; 3; 6; -1)$ $a_2 = (0; 3; 3; 2)$

$a_3 = (-1; 2; 3; 3)$ $a_4 = (-1; -2; -6; 0)$

4. Комплекс саннар

4.1. Комплекс саннарның алгебраик рәвеше

Бу бүлектә китерелгән кайбер мисалларның чишү юлларын карап китик.

1. Бирелгән комплекс саннарны алгебраик рәвештә күрсәтегез:

а) $z = \frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$; *б)* $z = \frac{3+i}{(1+i)(2-3i)}$;

в) $(2-i)^4$.

Чишү. Бу мисалларны чишү өчен барлык күрсәтелгән гамәлләрне башкарырга кирәк.

$$а)\ z = \frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i} = \frac{(1+i)(2+i)^2-(1-i)(2-i)^2}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{(1+i)(3+4i)-(1-i)(3-4i)}{5} = \frac{14}{5}i$$

$$б)\ \frac{3+i}{(1+i)(2-3i)} = \frac{3+i}{5-i} = \frac{(3+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{14+8i}{26} = \frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$$

в) Бу мисалны Ньютон биномы формуласыннан файдаланып чишәргә була.

$$(2-i)^4 = 2^4 + C_4^1 \cdot 2^3(-i) + C_4^2 \cdot 2^2(-i)^2 + C_4^3 \cdot 2(-i)^3 + (-i)^4 =$$

$$= 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i,$$

яки $(2-i)^4 = (3-4i)^2 = -7 - 24i$.

2. Реаль x, y билгесезләренә карата тигезләмәләрне чишегез:

а) $(1+2i)x + (3-5i)y = 1-3i$;

б) $(2+3i)x^2 + (2+i)x + (4-3i)y = 8+17i$.

Чишү. Мондый мисалларда сул һәм уң яктагы комплекс саннарны чагыштырудан килеп чыккан системаны чишергә кирәк.

а) $(x+3y) + (2x-5y)i = 1-3i$.

Димәк, $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3. \end{cases}$

Бу системаның чишелеше: $x = -\frac{4}{11}, y = \frac{5}{11}$. Шулай булгач, $\left(-\frac{4}{11}; \frac{5}{11}\right)$ бирелгән тигезләмәнең бердән бер чишелеше була.

б) $(2x^2 + 2x + 4y) + (3x^2 + x - 3y)i = 8 + 17i$.

Димәк, $\begin{cases} 2x^2 + 2x + 4y = 8 \\ 3x^2 + x - 3y = 17. \end{cases}$

Бу системаның икенче тигезләмәсеннән тапкан $y = \frac{3x^2+x-17}{3}$ны беренче тигезләмәгә куеп, $9x^2 + 5x - 46 = 0$ тигезләмәсен табабыз. Аның чишелешләре: $x_1 = -\frac{23}{9}, x_2 = 2.$

Шуңа күрә $y_1 = -\frac{1}{81}$, $y_2 = -1$ була. Димәк, бирелгән тигезләмәнең ике чишелеше бар: $(-\frac{23}{9}; -\frac{1}{81}), (2; -1).$

3. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $(1 - i)\bar{z} - 3iz = 2 - i;$

б) $z^3 = -i.$

Чишү.

а) $(1 - i)\bar{z} - 3iz = 2 - i.$

$z = x + \text{i}y$ булсын, $x,y \in \boldsymbol{R}$. Ул вакытта $(1 - i)(x - iy) - 3i(x + iy) = 2 - i.$

Җәяләрне ачып сул яктагы комплекс санны табабыз:

$$(1 - \text{i})(x - iy) - 3i(x + iy) = (x + 2y) - i(4x + y)$$

Димәк, $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 4x + y = 1. \end{cases}$

Бу системаның чишелеше $x = 0$, $y = 1$. Шулай булгач, $z = i$ бирелгән тигезләмәнен бердән бер чишелеше була.

б) $z^3 = -i.$

Әгәр, $z = x + iy$ дип тамгаласак, $(x + iy)^3 = -i.$

Димәк, $(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = -i.$ Бу вакытта

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 0 \\ 3x^2y - y^3 = -1 \end{cases}$$

системасын төзибез. Беренче тигезләмәдән $x = 0$ яки $x = \pm\sqrt{3}y$ икәнен табабыз. Әгәр $x = 0$ булса, икенче тигезләмәдән $y = 1$ икәнлеге килеп чыга. Әгәр $x = \pm\sqrt{3}y$ булса, $y = -\frac{1}{2}$ була. Ул вакытта $x = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$. Димәк бирелгән тигезләмәнең өч чишелеше була:

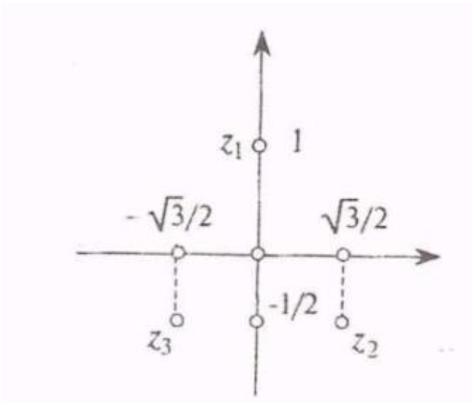
$$z_1 = 0 + i = i, z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, z_3 \ = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Искәрмә. $-i = i^3$ икәнен исәпкә алсак, бу тигезләмәне башка төрле юл белән дә чишеп була. Чыннан да, бу вакытта $z^3 = i^3$, ягъни $z^3 - i^3 = 0$. Ләкин, $z^3 - i^3 = (z - i)(z^2 + iz - 1)$=0. Димәк, $z - i = 0$ яисә $z^2 + iz - 1 == 0$. Беренче тигезләмәдән $z_1 = i$ икәнен табабыз. Икенче тигезләмәдән тагын ике тамыр табыла:

$$z_2 = -\frac{i}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4} + 1} = -\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

4. $z^3 = \frac{1-i}{1+i}$ шартына ия булган комплекс z саннарын һәм аларның геометрик сүрәтен табыгыз.

Чишү. $\frac{1-i}{1+i} = -i \ = \ i^3$ булганга күрә, безгә $z^3 = i^3$ тигезләмәсен чишәргә кирәк. Аның чишелешләре $z_1 = i,$ $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ $, z_3 = -\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ югарыдагы мисалда (3,*б*) табылган иде. Аларның геометрик сүрәте яссылыктагы өч нокта була (рәс.16).



Рәс.16

5. Әгәр $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -4 + 3i$ булса, a һәм b нинди реаль кыйммәтләр алганда $\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2$ шарты үтәлә?

Чишү. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{-4+3i} = -i$

$$az_1 + bz_2 = a(3 + 4i) + b(-4 + 3i) = (3a - 4b) + (4a + 3b)i$$

Мәсьәлән шарты буенча $(3a - 4b) + (4a + 3b)i = -i$. Димәк,

$$\begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 4a + 3b = -1 \end{cases}$$

Бу системадан $a = -\frac{4}{25}$, $b = -\frac{3}{25}$ икәнен табабыз.

6. $z + 2\bar{z} = 3 + i$ шарты үтәлсә z^{12}не табыгыз.

Чишү. $z = x + iy$ булса, $z + 2\bar{z} = x + iy + 2(x - iy) = 3x - iy$. Мәсьәләнең шартын исәпкә алсак, $3x - iy = 3 + i$. Димәк, $x = 1, y = -1$.

Моннан $z = 1 - i$ икәнен табабыз. $z^2 = -2i$ булганга күрә,

$$z^{12} = (-2i)^6 = (-2)^6 i^6 = -64.$$

7. $\mathrm{Re}\frac{3}{z} \geq Im\left(\frac{1}{z} - 1\right)$ шартын канәгатьләндергән комплекс z саннарының геометрик сүрәтен табыгыз.

Чишү. $z = x + iy, z \neq 0 + 0i$ булсын. Ул вакытта

$$\frac{3}{z} = \frac{3}{x+iy} = \frac{3x-3yi}{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{3}{z}\right) = \frac{3x}{x^2+y^2},$$

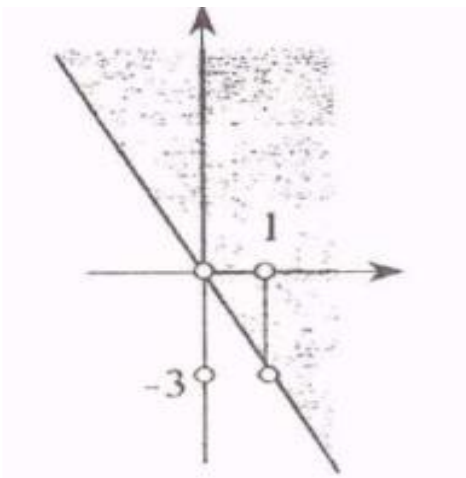
$$\frac{1}{z} - 1 = \frac{1-x-iy}{x+iy} = \frac{(x-x^2-y^2)-yi}{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Мәсьәләнең шарты буенча $\frac{3x}{x^2+y^2} \geq -\frac{y}{x^2+y^2}$. Димәк, $3x \geq -y$ ягъни $y \geq -3x$.

$y = -3x$ тигезләмәсенең геометрик сүрәте турыдагы нокталар,

$y \geq -3x$ – $y = -3x$ турыдагы өстәрәк урнашкан ярымъяссылык нокталары (рәс.17).

Рәс.17



8. Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1 + i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1 + 3i. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1+i)z_1 + iz_2 = -3+i, \\ (2-i)z_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_2 = 5i. \end{cases}$

Чишү. Мондый ике билгесез сызыкча тигезләмәләр системасының бер чишелеше, чиксез күп чишелеше булуы, яисә бер чишелеше дә булмавы мөмкин.

Әгәр системаның төп билгеләгече нуль булмаса, аның бердән-бер чишелешен Крамер кагыйдәсен кулланып табып була. Әгәр төп билгеләгеч нульгә тигез булса, системаның чиксез күп чишелешләрен табарга яки системаның чишелеше булмавын күрсәтергә Гаусс ысулы ярдәм итә. Бу юл буенча бердән-бер чишелешне дә табып була.

а) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}$

Бу системаның төп билгеләгече $\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{vmatrix} = 4i \neq 0.$ Аның бердән-бер чишелешен Крамер кагыйдәсе буенча табыйк. Бу системаның ярдәмче билгеләгечләре:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 1+3i & 1+i \end{vmatrix} = -4, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1+i \\ 1-i & 1+3i \end{vmatrix} = -4+4i$$

булганлыктан $z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = i,\ z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1+i.$

Димәк, $(i; 1+i)$ −системаның бердән-бер чишелеше.

б) $\begin{cases} (1+i)z_1 + iz_2 = -3+i, \\ (2-i)z_1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_2 = 5i \end{cases}$

Чишү. Бу системаны Гаусс ысулы белән чишик. Аның өчен коэффициентлардан һәм ирекле буыннардан төзелгән матрицаны баскыч сыман рәвешкә китерик:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & i & -3+i \\ 2-i & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i & 5i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & i & -3+i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Моннан системаның чиксез күп чишелеше булуын күрәбез.

Аларны $(1+i)z_1 + iz_2 = -3+i$ тигезләмәсен чишеп табабыз.

z_2 билгесезен ирекле билгесез итеп алсак, $z_1 = \frac{-3+i-iz_2}{1+i}$. Ирекле билегесез теләсә нинди комплек сан була ала.

Шуңа күрә аны $z_2 = a + bi$ дип алабыз.

Ул вакытта $z_1 = \frac{(-2-a+b)+(4-a-b)i}{2}$ була. Димәк, бирелгән системаның чишелешләре $\left(\frac{(-2-a+b)+(4-a-b)i}{2}; a + bi\right)$ формуласы буенча табыла. Монда a, b $-$ теләсә нинди реаль кыйммәт ала.

Мәсәлән, $a = b = 0$ булса, $(-1 + 2i; 0), a = 1, b = -1$ өчен $(-2 + 2i; 1 - i)$ аерым чишелешләре табыла. Алар чиксез күп була.

Искәрмә. Гаусс ысулы белән чишкәндә системаның матрицасы $\left(\begin{array}{cc|c} a_1 + ib_1 & a_2 + ib_2 & a_3 + ib_3 \\ 0 & 0 & c_3 + id_3 \end{array}\right), c_3 + id_3 \neq 0,$ рәвешендә китерелсә, бу системаның чилеше булмый.

9. Алгебраик рәвештә табыгыз: $\sqrt{4 + 3i}$

Чишү. $\sqrt{4 + 3i} = x + iy$ булсын. Ул вакытта $4 + 3i = x^2 - y^2 + 2xyi$.

$$\text{Димәк, } \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 3 \end{cases}.$$

Бу системаның икенче тигезләмәсеннән табылган $x = \frac{3}{2y}$ ны беренчесенә куеп, $4y^4 + 16y^2 - 9 = 0$ тигезләмәсен табабыз. Яңа билгесез $t = y^2$ кертеп, квадрат тигезләмә $4t^2 + 16t - 9 = 0$ табыла.

Аның чишелешләре $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -\frac{9}{2}$. Безгә кирәк $t > 0$ булырга тиеш, шуңа күрә $y^2 = \frac{1}{2}$; $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ул вакытта $x = \frac{3}{2y} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Димәк, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$, $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$ $\sqrt{4 + 3i}$ нең ике кыйммәте.

10. Тигезләмәне чишегез:

$$z^2 + (3 + 2i)z - 7 + 17i = 0.$$

Чишү. Икенче дәрәҗә тигезләмәнең тамырларын табу формуласы буенча $z_{1,2} = \frac{-3-2i\pm\sqrt{33-56i}}{2}$.

Хәзер безгә $\sqrt{33 - 56i}$ не алгебраик рәвештә табырга кирәк

$\sqrt{33-56i} = x + iy$ булса, $\begin{cases} x^2 - y^2 = 33, \\ xy = -28 \end{cases}$ системасын табабыз.

Аның чишелешләре $x_1 = 7,\ y_1 = -4,\ x_2 = -7,\ y_2 = 4$. (Бу чишелешләрне табу юлы 9 нчы мисалда күрсәтелгән).

Димәк,

$$z_1 = \frac{-3 - 2i + 7 - 4i}{2} = 2 - 3i, \qquad z_2 = \frac{-3 - 2i - 7 + 4i}{2} = -5 + i$$

бирелгән икенче дәрәҗә тигезләмәнең чишелешләре.

Мисаллар:

1.1. Бирелгән саннарның геометрик сурәтен табыгыз:

а) $z = 2 + i$; *д)* $z = 3$;

б) $z = 2 - i$; *е)* $z = 2i$;

в) $z = -2 + i$; *ж)* $z = -1$;

г) $z = -2 - i$; *з)* $z = -i$.

1.2. $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 \cdot z_2,\ \frac{z_1}{z_2},\ \frac{z_2}{z_1}$ саннарын табыгыз

а) $z_1 = 10 + i,\quad z_2 = -5 + 2i$;

б) $z_1 = -2 + 3i,\ z_2 = -3 - 2i$;

в) $z_1 = 2 - 3i,\quad z_2 = 1 + i$;

г) $z_1 = -1 - i,\quad z_2 = 2 + 3i$.

1.3. $i^3, i^4, i^6, i^8, \frac{1}{i^7}, \frac{1}{i^5}, i^{231}, i^{318}$ саннарын табыгыз.

1.4. Бирелгән саннарны алгебраик рәвештә күрсәтегез:

а) $\frac{5+i}{(1-i)(2+3i)}$; *д)* $\frac{(2+i)(4+3i)}{(3-i)(1-3i)-(1-2i)(2-i)}$;

б) $(2-i)^2 + (1+i)^4 - \frac{7-i}{2+i}$; *е)* $\frac{(1+2i)(5-4i)}{(3+3i)^2-(2+i)(1+2i)}$;

в) $(1+2i)^6$; *ж)* $\frac{(2+3i)(4+5i)}{(3-i)(1-3i)-(1-4i)(4-i)}$;

г) $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$; *з)* $\frac{(1-3i)(3-5i)}{(2+i)(1+2i)-(1+4i)(4+i)}$.

1.5. Бирелгән саннарны реаль һәм уйланма өлешләрен табыгыз:

а) $z = \frac{1}{2+3i}$; *б)* $z = \frac{1}{2-i} + 1$; *в)* $z = \frac{1}{1+2i} + \frac{2}{1-2i}$;

г) $z = (1-i)(2+i) - i$; *д)* $z = \frac{2+i}{1-i} + \frac{1-i}{2-i}$.

1.6. Әгәр $Rez = x, Imz = y$ булса, бирелгән саннарның реаль һәм уйланма өлешләрен табыгыз:

а) $\frac{2}{z+1}$; *б)* $\frac{1}{\bar{z}-1}$; *в)* $\frac{2}{\bar{z}+1}$; *г)* $\frac{1}{z} + i$;

д) $\frac{2}{z}$; *е)* $\frac{1}{z} + \frac{2}{\bar{z}}$; *ж)* $\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

1.7. Бирелгән тигезләмәләрне реаль x, y билгесезләренә карата чишегез:

а) $(5-8i)x + (7+3i)y = 2 - i$;

б) $(7+2i)x-(5-4i)y=-1-i$;

в) $(7-2i)x+(5+4i)y=-3+2i$;

г) $(2+i)x+(1+2i)y=1-4i$;

д) $(3+2i)x+(1+3i)y=4-9i$;

е) $(3-i)x^2-(3+2i)x-(1-i)y=13-10i$.

1.8. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $\bar{z}=z^2$; *б)* $\bar{z}=z^3$; *в)* $z\cdot\bar{z}+2\bar{z}=3+2i$;

г) $(1-i)z+(2+i)\bar{z}=6-3i$; *д)* $(2+i)z+(3+2i)\bar{z}=21-i$;

е) $(2+i)z+(1-i)\bar{z}=3+3i$; *ж)* $(2-i)z+(1+i)\bar{z}=3-3i$;

з) $(1+i)z+(2-i)\bar{z}=6+3i$.

1.9. $z^2=\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ шартын канәгатьләндергән комплекс z саннарын табыгыз һәм аларның геометрик сурәтен ясагыз.

1.10. Әгәр, $z_1=2-i$, $z_2=-0{,}2-0{,}4i$ булса, a һәм b нинди реаль кыйммәтләр алганда, $z_1\cdot z_2=az_1+bz_2$ шарты үтәлә?

1.11. $3z-\bar{z}=-4+8i$ шарты үтәлсә, z^6 ны табыгыз.

1.12. Бирелгән шартны канәгатьләндергән комлекс z саннарының геометрик сурәтен күрсәтегез.

а) $Im\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right)\geq 1$; *б)* $Im\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)\geq 1$; *в)* $Im\left(\frac{2}{\bar{z}-1}\right)\geq 1$;

г) $Re\left(\frac{2}{\bar{z}+1}\right)\geq 1$; *д)* $Re\left(\frac{1}{z}+i\right)\leq Im\frac{2}{z}$.

1.13. Тигезләмәләр системасын чишегез:

а) $\begin{cases}(2+i)z_1-(3+i)z_2=i,\\(3+i)z_1+(2-i)z_2=i;\end{cases}$ *б)* $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8;\end{cases}$

в) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=2+6i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=5+4i;\end{cases}$ *г)* $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=2+2i,\\2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i;\end{cases}$

д) $\begin{cases}(1+i)z_1+(2-i)z_2=2,\\(2-i)z_1+(1+i)z_2=7;\end{cases}$ *е)* $\begin{cases}-iz_1+(2-i)z_2=2,\\(2-i)z_1-iz_2=6;\end{cases}$

1.14. Алгебраик рәвешен табыгыз:

а) $\sqrt{i}$; *б)* $\sqrt{3-4i}$; *в)* $\sqrt{5-12i}$; *г)* $\sqrt{8+6i}$;

д) $\sqrt{-3-4i}$; *е)* $\sqrt{-8+6i}$; *ж)* $\sqrt{16i}$; *з)* $\sqrt{5+12i}$.

1.15. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$; *е)* $z^2 - (3 - 2i)z + (5 - 5i) = 0$;

б) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$; *ж)* $z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 5i) = 0$;

в) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$; *з)* $z^4 - 3z^2 + 4 = 0$;

г) $z^2 - (2 + i)z + (-1 + 7i) = 0$; *и)* $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$;

д) $(2 + i)z^2 - (5 - i)z + (2 - 2i) = 0$.

1.16. Исбатлагыз:

а) Комплекс z саны реаль булсын өчен, $z = \bar{z}$ булу кирәк һәм шул җитә.

б) Комплекс z саны уйланма булсын өчен, $\bar{z} = -z$ булу кирәк һәм шул җитә.

в) Ике комплекс санның тапкырчыгышы реаль булсын өчен, бу саннарның берсе икенчесенең иярешлесеннән реаль тапкырлаучы гына аерылып тору кирәк һәм шул җитә.

г) Ике комплекс санның суммасы һәм тапкырчыгышы реаль булсын өчен, бу саннарның үзара иярешле яисә икесенең дә реаль булуы кирәк һәм шул җитә.

4.2. Комплекс саннарның модуле һәм аргументы

Бу бүлектә комплекс саннарның модуле һәм аргументы белән бәйле мәсьәләләр бирелә. Аларның кайберләренең чишү юлларын карап китик.

1. Бирелгән шартларны канәгатьләндергән комплекс z саннарының геометрик сурәтен табыгыз:

а) $\begin{cases} |z + i - 1| < 5, \\ \arg(z + i) = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$ *б)* $|z - i| < |z + 2 - 3i|$.

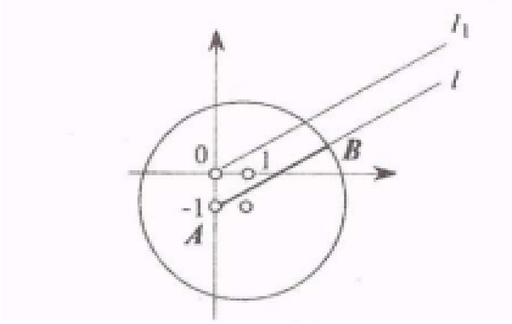
Чишү. а) $z = x + iy$ булса, $|z + i - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

Димәк, бирелгән шартларның беренчесен канәгатьләндергән комплекс z саннарының сурәте – үзәге $(1; -1)$, радиусы 5 булган түгәрәкнең эчке нокталары.

l_1 нурындагы барлык z_1 саннарының аргументы $\frac{\pi}{6}$ га тигез. Бирелгән буенча

$z = z_1 - i$. Димәк, безгә кирәк саннар $(0; -1)$ ноктасыннан чыккан l нурында яталар, $l \parallel l_1$.

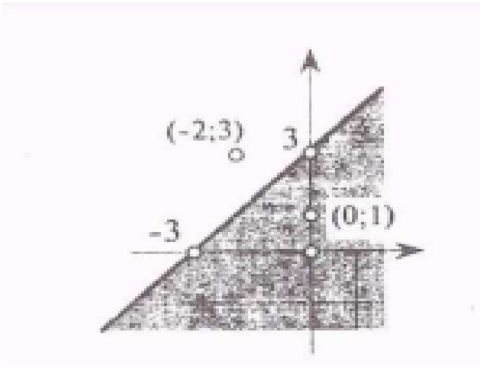
Ике шартны да канәгатьләндергән саннарның геометрик сурәте – табылган ике күплекнең (түгәрәк һәм нурның) кисешмәсе була. Димәк, $[AB]$ кисемтәсе мәсьәләнең чишелеше була (рәс.18).



Рәс.18

б) $|z - i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$ – (x, y) ноктасы белән $(0,1)$ ноктасы арасындагы ераклык, $|z + 2 - 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$ – (x, y) ноктасы белән $(-2,3)$ ноктасы арасындагы ераклык. Бирелгән буенча $\sqrt{x^2 + (y-1)^2} < \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$.

Моннан $y < x + 3$ тигезсезлеген табабыз. Димәк, бирелгән шартны канәгатьләндергән саннарның сурәте – $y = x + 3$ турысыннан астарак урнашкан ярымъяссылык (рәс.19).



Рәс.19

2. Тигезләмәләр системасын чишегез:

$$\begin{cases} \left|\frac{z+2i}{z+4i}\right| = 1, \\ \left|\frac{z+2i}{z-1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Чишү. Модульләрнең үзлеге буенча $\left|\frac{z+2i}{z+4i}\right| = \frac{|z+2i|}{|z+4i|}, z = x + iy$ булса, $|z+2i| = \sqrt{x^2+(y+2)^2}$, $|z+4i| = \sqrt{x^2+(y+4)^2}$, $|z-1| =$ $= \sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

Мәсьәләнең шарты буенча

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{x^2+(y+4)^2} \\ \sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \end{cases}$$

Моннан $\begin{cases} y = 3 \\ x^2+2x-8=0 \end{cases}$ системасын табабыз.

Аның ике чишелеше бар: $(2,-3), (-4,-3)$.

Димәк, $z_1 = 2-3i, z_2 = -4-3i$ бирелгән системаның чишелешләре.

3. $|z| = |z-2i|$ булган һәм $|z|$ иң кечкенә кыйммәт алырдай комплекс z санын табыгыз.

Чишү. $z = x+iy$ булса, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}, |z-2i| = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$. Мәсьәләнең шарты буенча $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-2)^2}$. Моннан $-4y+4=0$ тигезләмәсен табабыз. Аның чишелеше $y=1$. Димәк, $z = x+1$ − беренче шартны канәгатьләндергән саннар.

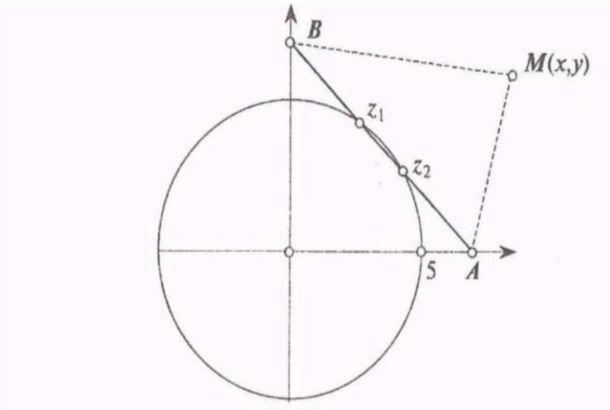
Мондый саннар чиксез күп, чөнки x теләсә нинди реаль кыйммәт ата. Аларның геометрик сурәте $y=1$ турысы. Безгә шулар арасыннан иң кечкенә модульлесен сайлап алырга кирәк. $|z| == \sqrt{x^2+1}$ нең иң кеченә кыйммәте $x=0$ булганда табыла.

Димәк, $z=i$ безгә кирәк сан. Чыннан да, $y=1$ турысындагы нокталарның $(0;0)$ ноктасына иң якын урнашканы $(0;1)$ ноктасы.

4. $z \cdot \bar{z} = 25$ тигезләмәсенең $|z-7|+|z-7i|$ аңлатмасына иң кечкенә кыйммәт бирә торган чишелешләрен табыгыз.

Чишү. Әгәр $z = x+iy$ булса, $|z-7| = \sqrt{(x-7)^2+y^2}$ – $M(x,y)$ һәм $\boldsymbol{A}(7{,}0)$, $|z-7i| = \sqrt{x^2+(y-7)^2}$ – $M(x,y)$ һәм $B(0{,}7)$ нокталары арасындагы ераклыклар (рәс.20).

Әгәр M ноктасы AB кисемтәсендә ятса, $|z-7|+|z-7i|$ иң кечкенә кыйммәт алачак. Димәк, $\frac{x-7}{-7}=\frac{y-0}{7}$, ягъни $y=7-x$ булырга тиеш.



Рәс.20

$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=25$ шартын исәпкә алып, $x^2+(7-x)^2=25$ тигезләмәсен төзибез. Моннан $x^2-7x+12=0$ икәнен күрәбез. Бу тигезләмәнең тамырлары: $x_1=3, x_2=4$. Шуңа күрә $y_1=4, y_2=3$ була.

Димәк, $z_1=3+4i, z_2=4+3i$ без эзләгән чишелешләр.

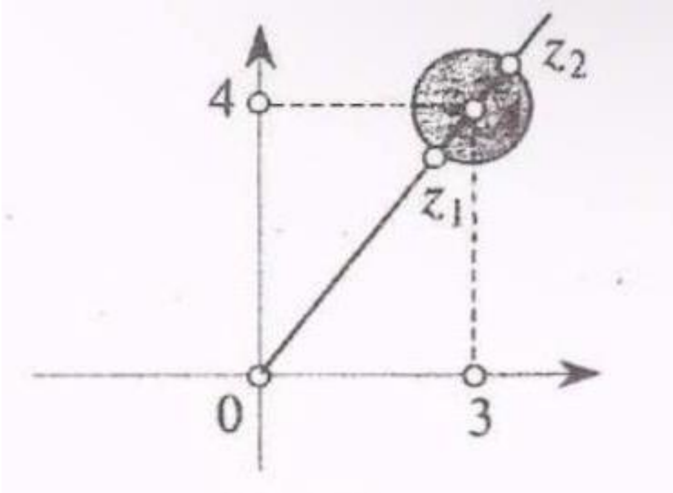
Аларның геометрик сурәте $x^2+y^2=25$ әйләнәсе белән $\boldsymbol{AB}$ кисемтәсенең кисешү нокталары.

5. $|zi-3i+4|\leq|i|$ булган комплекс z саннарының иң зур һәм иң кечкенә модулен табыгыз.

Чишү. $z=x+iy$ булса, $zi-3i+4=(4-y)+(x-3)i$. Ул вакытта $|zi-3i+4|=\sqrt{(4-y)^2+(x-3)^2}$. Мәсьәләнең шарты буенча $\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}\leq 1$, чөнки $|i|=1$. Димәк, комплекс $z=(x;y)$ саннарына үзәге $A(3;4)$, радиусы 1 булган түгәрәк нокталары тиңдәш булалар (рәс.21). Иң кечкенә модуль z_1 санныкы, иң зур модульле сан – z_2.

$$\boldsymbol{OA}=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad |z_1|=5-1=4,\ |z_2|=5+1=6.$$

Димәк, $4\leq|z|\leq 6$.



Рәс.21

6. $M = \left\{ z_1 \,\middle|\, \left| iz_1 + \sqrt{2} \right| = 0{,}5 \right\}$.

$K = \{z_2 | z_2 = iz_1, z_1 \in M\}$ булса, M һәм K геометрик фигуралар арасындагы иң кечкенә ераклыкны табыгыз.

Чишү. $z_1 = x + iy$ булса, $iz_1 + \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - y\right) + ix$. Шуңа күрә $\left|iz_1 + \sqrt{2}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2} - y\right)^2 + x^2} = \frac{1}{2}$. Ягъни $x^2 + \left(y - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

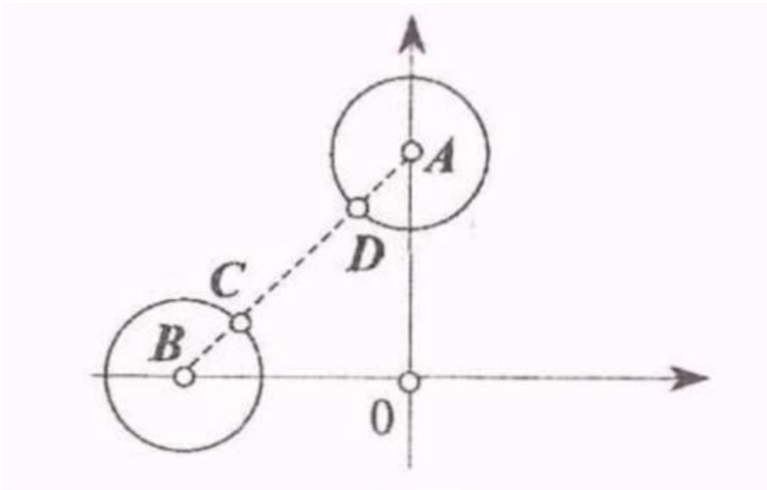
Димәк, M – үзәге $A\left(0; \sqrt{2}\right)$, радиусы $\frac{1}{2}$ булган әйләнә нокталары (рәс.22).

Бирелгән буенча, $z_2 = i(x + iy) = -y + ix$. Димәк, K күплеген табу өчен M күплеген уңай юнәлештә $90°$ ка борырга кирәк.

Шуңа күрә, K – үзәге $B\left(-\sqrt{2}; 0\right)$, радиусы $\frac{1}{2}$ булган әйләнә нокталары. Пифагор теоремасы буенча

$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2 + 2} = 2.\ BC = \frac{1}{2}, DA = \frac{1}{2}.$

Димәк, M һәм K арасындагы иң кечкенә ераклык $CD = 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1$.



Рәс.22

7. Тигезләмәләрне чишегез:

$a)\ |z|^2 + 2iz - 2(1+i) = 0;$ б) $|z| + z = 2 + i.$

Чишү. $a)\ z = x + iy$ булса, $|z|^2 = x^2 + y^2$. Шуңа күрә, бирелгән тигезләмәне түбәндәгечә язып була:

$$x^2 + y^2 + 2i(x + iy) - 2(1+i) = 0.$$

Моннан $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0, \\ 2x - 2 = 0 \end{cases}$ тигезләмәләр системасын табабыз.

Икенче тигезләмәдән табылган $x = 1$ кыйммәтен беренче тигезләмәгә куйсак, $y^2 - 2y - 1 = 0$ тигезләмәсен табабыз.

Аның чишелешләре: $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Димәк, бирелгән тигезләмәнең ике чишелеше бар: $z_1 = 1 + \left(1 + \sqrt{2}\right)i,\quad z_2 = 1 + \left(1 - \sqrt{2}\,\right)i.$

б) $z = x + iy$ булса, бирелгән тигезләмә

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy = 2 + i$$

рәвешендә языла.

Димәк, $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + x = 2, \\ y = 1 \end{cases}$ булырга тиеш.

$\sqrt{x^2 + 1} = 2 - x$ тигезләмәсеннән $x = \frac{3}{4}$ икәнен табабыз.

Димәк, $z = \frac{3}{4} + i$ бирелгән тигезләмәнең чишелеше була.

8. Әгәр $|z - 3 - 4i| \le 1$ булса, $\frac{Imz}{Rez}$ нинди кыйммәтләр ала?

Чишү. Әгәр $z = x + iy$ булса,

$$\frac{Imz}{Rez}=\frac{y}{x}, \quad |z-3-4i|= \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}\leq 1.$$

Димәк, $(x-3)^2+(y-4)^2\leq 1$ тигезсезлеге үтәлгәндә, безгә $\frac{y}{x}=\boldsymbol{c}$ реаль санының нинди кыммәтләр алганын табарга кирәк. Икенче төрле әйтсәк, $\boldsymbol{c}$ нинди кыйммәтләр алганда

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2\leq 1\,, \\ \qquad\qquad y=x\boldsymbol{c}\end{cases} \qquad (1)$$

системасының чишелеше бар дигән сорауга җавап бирергә кирәк.

Бу системадагы тигезсезлектә y урынына $x\cdot\boldsymbol{c}$ куеп, җәяләрне ачып, охшаш буыннарны берләштерсәк,

$$(c^2+1)x^2-2(3+4c)x+24\leq 0 \qquad (2)$$

тигезсезлеген табабыз.

(1) системасының чишелеше булсын өчен (2) тигезсезлекнең чишелеше булуы кирәк һәм шул җитә дә. Ә моның өчен (2) тигезсезлекнең сул ягындагы икенче дәрәҗә өчбуынның дискриминанты

$$D=4(3+4c)^2-4\cdot 24(c^2+1)=4(-8c^2+24c-15)\geq 0$$

булырга тиеш.

Димәк, $8c^2-24c+15\leq 0$ тигезсезлеге үтәлергә тиеш. Сул яктагы өчбуынның тамырлары $c_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{6}}{4}$ булганга күрә, югарыдагы тигезсезлек мондый рәвештә языла:

$$8\left(c-\frac{6-\sqrt{6}}{4}\right)\left(c-\frac{6+\sqrt{6}}{4}\right)\leq 0.$$

Бу тигезсезлекнең чишелеше $\frac{6-\sqrt{6}}{4}\leq\boldsymbol{c}\leq\frac{6+\sqrt{6}}{4}$. Димәк, $\boldsymbol{c}$ шушы аралыктагы кыйммәтләрне алганда, $D\geq 0$. Бу вакытта (2) тигезсезлекнең (димәк, (1) системаның да) чишелеше булачак.

Димәк, $\frac{6-\sqrt{6}}{4}\leq\frac{Imz}{Rez}\leq\frac{6+\sqrt{6}}{4}$.

Мисаллар

2.1. Бирелгән шартларны канәгатьләндергән комплекс z саннарының геометрик сурәтен табыгыз:

$a)\ 3 < |z| \le 4$; б) $|z-1+i| \ge 5$;

в) $\arg z = \frac{\pi}{4}$; *г)* $\arg(z-i) = \frac{\pi}{6}$;

д) $\begin{cases} |z-i+1| \le 3 \\ \arg z = \frac{\pi}{3} \end{cases}$; е) $\begin{cases} |z-i| < 2 \\ |z+i| \le 2 \end{cases}$;

ж) $\frac{\pi}{4} < arg\, z \le \frac{\pi}{2}$; *з)* $|z| = \left|z + \frac{1}{3i}\right|$;

$u)\ \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} < arg\, z \le \dfrac{\pi}{3} \\ |z-i| > 1 \end{cases}$; к)$\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}$;

л) $2 < |2iz + 1 - i| < 6$; м) $\frac{|z+i|}{|z-2|} \ge 0{,}5$;

н) $\frac{|z+2i|}{|z-i|} \ge 2$; $o)\ \begin{cases} 1 \le |z-3+i| \le 4 \\ \arg z = \frac{\pi}{4} \end{cases}$;

$n)\ \begin{cases} 1 < |z+3+2i| \le 2 \\ \dfrac{2\pi}{3} < \arg z \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$; $p)\begin{cases} |z+i| = |z-i| \\ \arg(z-i) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

$c)\ \begin{cases} |z+2i-2| \le \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i\right| \\ \arg(z+i) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$; $m)\begin{cases} 2 < |z-2i| < 3 \\ \arg(z+1) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$;

2.2. Тигезләмәләр системасын чишегез: $\begin{cases} \left|\frac{z-4}{z-2}\right| = 1 \\ \frac{|z-2|}{|z-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

2.3. $|z| = |z+6i|$ булган һәм $|z|$ иң кечкенә кыйммәт алырдай комплекс z санын табыгыз.

2.4. $|z - 25i| \le 15$ булган һәм $\arg z$ кечкенә уңай кыйммәт алырдай комплекс z санын табыгыз.

2.5. $z^2 - (\bar{z})^2 = 16i$ тигезләмәсенен $|z-5| + |z-5i|$ нең иң кечкенә кыйммәтен бирә торган чишелешләрен табыгыз.

2.6. $|z-i| = \left|z+\sqrt{3}\right|$булган комплекс z саннарының иң зур һәм иң кечкенә модулен табыгыз.

2.7. $M = \{z_1 \big|\, |-z_1 - 2\sqrt{2}i| = 1\}$, $K = \{z_2 \mid z_2 = -iz_1, z_1 \in M\}$ булса, M һәм

K геометрик фигуралары арасындагы иң кечкенә ераклыкны табыгыз.

2.8. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $z^2 + |z| = 0$; *б)* $z \cdot |z| - 2z - i = 0$;

в) $z + |z| = 3$; *г)* $|z| + z = 8 + 4i$;

д) $|z| - z = 8 + 12i$; *е)* $|z| - z = 1 + 2i$.

2.9. Исбатлагыз:

а) $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$; *б)* $|z_1| - |z_2| \le |z_1 \pm z_2|$;

в) $|z| = |\bar{z}|$; *г)* $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$;

д) Әгәр $1 \le |z| \le 2$ булса, $1 \le |z^2 - 5| \le 9$;

е) Әгәр $|z| < 1$ булса, $|z^2 - z + i| < 3$;

ж) Әгәр $|z| < \frac{1}{2}$ булса, $|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}$.

2.10. Әгәр $|z + 4 - 3i| \le 1$ булса, $\frac{Rez}{Imz}$ нинди кыйммәтләр ала?

4.3. Комплекс саннарның тригонометрик рәвеше

Бу бүлектә китерелгән мәсьәләләр комплекс саннарның тригонометрик рәвешенә нигезләнгәннәр. Шуларның кайберләренең чишү юллары белән танышыйк.

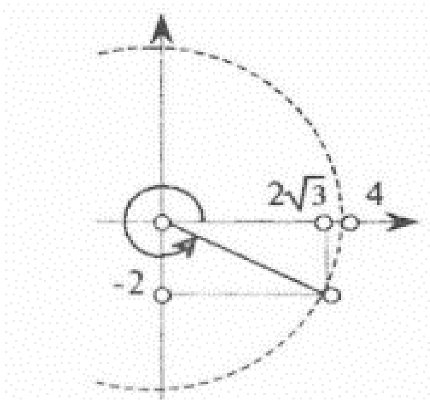
1. Бирелгән саннарны тригонометрик рәвештә күрсәтегез.

а) $z = 2\sqrt{3} - 2i$; б) $z = 5$; в) $z = -4i$.

Чишү. а) Бирелгән санның модулен табудан башлыйбыз:

$$|z| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Бу санның аргументын $-\varphi$ почмагын эзләгәндә, $cos\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, sin\varphi = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ формулаларыннан файдаланабыз. $cos\varphi$ уңай, $sin\varphi$ тискәре кыйммәт алганга күрә, $\varphi = argz$ дүртенче чиректәге почмак була. Аның төп кыйммәте $\frac{11\pi}{6} = 330^{\circ}$. Аргументны тапканда бирелгән санның геометрик сурәтен файдалану да ярдәм итә (рәс.23). Димәк, $z = 4\left(cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6}\right)$- бирелгән санның тригонометрик рәвеше.

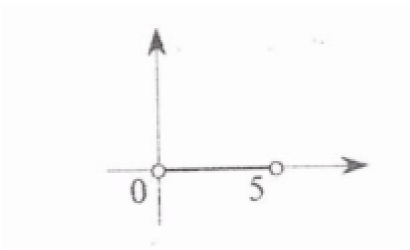


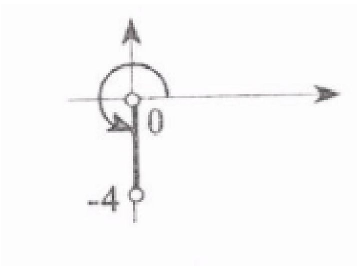
Рәс.23

б) $|z| = \sqrt{5^2} = 5$;

$cos\varphi = \frac{5}{5} = 1, sin\varphi = \frac{0}{5} = 0$. Димәк, $\varphi = 0$.

Шуңа күрә $z = 5(cos0 + isin0)$ (рәс.24).





Рәс.24

Рәс.25

в) $|z| = \sqrt{(-4)^2} = 4$.

$cos\varphi = \frac{0}{4} = 0, sin\varphi = \frac{-4}{4} = -1.$ Димәк, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Шуңа күрә $z = 4(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2})$ (рәс.25).

2. Бирелгән гамәлләрне башкарыгыз: $z = \frac{(-1-i)^{25}}{(3-\sqrt{3}i)^{15}}$.

Чишү. Комплекс саннарны дәрәҗәгә күтәрү, тапкырлау һәм бүлүне тригонометрик рәвештә башкару уңайлырак булганга күрә, санаучыда һәм ваклаучыда торган саннарны тригонометрик рәвештә күрсәтәбез:

$-1 - i = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + isin\frac{5\pi}{4}\right), \quad 3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(cos\frac{11\pi}{6} + isin\frac{11\pi}{6}\right).$

Ул вакытта:

$$(-1 - i)^{25} = \left(\sqrt{2}\right)^{25}\left(cos\frac{5\pi}{4}\cdot 25 + isin\frac{5\pi}{4}\cdot 25\right) =$$

$$= 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\left(30\pi + \frac{5}{4}\pi\right) + isin\left(30\pi + \frac{5}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + isin\frac{5}{4}\pi\right).$$

$$\left(3 - \sqrt{3}i\right)^{15} = \left(2\sqrt{3}\right)^{15}\left(cos\frac{11\pi}{6}\cdot 15 + isin\frac{11\pi}{6}\cdot 15\right) =$$

$$= 2^{15}\cdot 3^7\sqrt{3}\left(\cos\left(26\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + isin\left(26\pi + \frac{3}{2}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{15}\cdot 3^7\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + isin\frac{3}{2}\pi\right).$$

Димәк,

$$z = \frac{2^{12}\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + isin\frac{5}{4}\pi\right)}{2^{15}\cdot 3^7\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + isin\frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2^3\cdot 3^7\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^3\cdot 3^7\sqrt{3}}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + isin\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2^3\cdot 3^8}\cdot(1 - i).$$

3. $|z| = 2\left|\sqrt{3} - i\right|$ һәм $\left|arg\left(\sqrt{3} - i\right) - argz\right| = \frac{\pi}{3}$ булырлык барлык комплекс z саннарын табыгыз.

Чишү. $\left|\sqrt{3}-i\right|=2,\ \ arg\left(\sqrt{3}-i\right)=\frac{11}{6}\pi.$

Мәсьәләнең шарты буенча $|z|=4,\ \frac{11}{6}\pi-argz=\pm\frac{\pi}{3}.$

Димәк, $argz_1=\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2},\ argz_2=\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{13\pi}{6}.$

Моннан $z_1=4\left(\cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}\right)=-4i,$

$$z_2=4\left(\cos\frac{13\pi}{6}+isin\frac{13\pi}{6}\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}+2i$$

безгә кирәк саннар.

4. Әгәр комплекс саны яссылыктагы нокта белән бирелгән булса, $u=\frac{(z+2-3i)(1+i\sqrt{3})}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ санын төзегез.

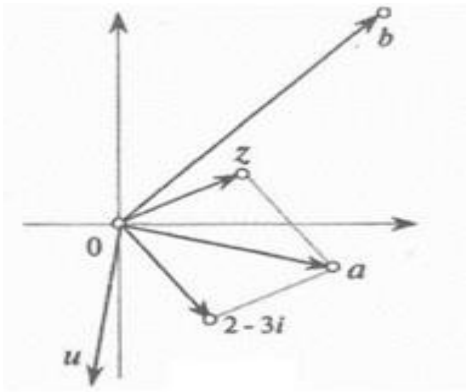
Чишү. Бирелгән z векторына $2-3i$ векторын кушып $a=z+2-3i$ векторын табабыз.

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)$$

булу сәбәпле, $b=a(1+i\sqrt{3})$ векторын табу өчен, a векторын 2 тапкыр озынайтып, сәгать теленең йөрешенә каршы $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ почмагына борабыз. $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)$ булганга күрә, b векторын 2 тапкыр кыскартып, сәгать теленең йөреше юнәлешендә $\varphi_2=\frac{3\pi}{4}$ почмагына борсак, безгә кирәк $\frac{b}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ векторы табыла (рәс.26). Бу мисалны башкача да эшләп була. Чыннан да

$$u=\frac{a(1+i\sqrt{3})}{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{2a\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)}{2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+isin\frac{3\pi}{4}\right)}=a\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Моннан күренгәнчә, u векторын табу өчен a векторын $\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\varphi_3$ почмагына бору җитә (бу a векторын сәгать теленең йөреше юнәлешендә $\frac{5\pi}{12}$ почмагына бору дигән сүз).



Рәс.26

Мисаллар

3.1. Бирелгән саннарны тригонометрик рәвештә күрсәтегез:

а) 2; *б)* -3; *в)* $3i$; *г)* $-2i$;

д) $\sqrt{3}+i$; *е)* $\sqrt{3}-i$; *ж)* $-\sqrt{3}+i$;

з) $-\sqrt{3}-i$; *и)* $\cos\frac{\pi}{6}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *к)* $\cos\varphi - i\sin\varphi$;

л) $-\cos\varphi + i\sin\varphi$; *м)* $-\cos\varphi - i\sin\varphi$.

3.2. $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3, z_2^4 саннарын тригонометрик рәвештә күрсәтегез:

а) $z_1 = 2\sqrt{3}+2i$; $z_2 = 3-3i$;

б) $z_1 = -2+2i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$;

в) $z_1 = -1+i\sqrt{3}$; $z_2 = -\sqrt{3}-i$;

г) $z_1 = -3\sqrt{3}-3i$; $z_2 = 2+2i$.

3.3. Тригонометрик рәвештә күрсәтегез:

а) $(1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; б) $\dfrac{i-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$;

в) $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi - i\sin\psi}$; г) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$.

3.4. Бирелгән гамәлләрне башкарыгыз:

а) $z = \dfrac{(-1+\sqrt{3}i)^{30}}{(1-i)^{10}}$; б) $z = \dfrac{(6-2\sqrt{3}i)^{40}}{(2\sqrt{3}+2i)^{30}}$;

в) $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^{40}}{(1+i)^{30}}$; г) $z = \dfrac{(2\sqrt{3}+6i)^{25}}{(-3-\sqrt{3}i)^{15}}$;

д) $z=\dfrac{(-1+i)^{30}}{(1-\sqrt{3}i)^{20}}$; е) $z=\dfrac{(2\sqrt{3}-2i)^{35}}{(2-2\sqrt{3}i)^{45}}$;

ж) $z=(2-2i)^7\cdot\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; з) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{100}$;

и) $z=\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$;

к) $z=\dfrac{(1-i\sqrt{3})^{12}-(1+i\sqrt{3})^{6}}{(-1+i)^{12}}$;

3.5. $|\boldsymbol{z}|=\frac{|-2-2i\sqrt{3}|}{2}$ һәм $\left|\arg z+\arg(-2-2i\sqrt{3})\right|=\frac{\pi}{6}$ булырлык барлык комплекс z саннарын табыгыз.

3.6. Исбатлагыз:

а) Әгәр $z_1=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ булса,

$$z_1^n+z_2^n=2\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right),\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

б) $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=2^n\cdot\cos^{\mathrm{n}}\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2}+i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$;

в) $(1+i)^{8n}=2^{4n}$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

г) $(1+i)^{4n}=(-1)^n\cdot 2^{2n}$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3.7. Комплекс z саны яссылыкта ниндидер нокта белән бирелгән һәм $|z|=2$ булса, u санын төзегез:

а) $u=-4z$; б) $u=2+z$; в) $u=-1+3z$;

г) $u=z\cdot i$; д) $u=z-3$; е) $u=z+i$;

ж) $u=z-2i$; з) $u=\dfrac{2z}{1-i}$; и) $u=\dfrac{z(1+i)}{2-2i}$;

к) $u=\dfrac{2zi}{\sqrt{3}-i}$; л) $u=\dfrac{1}{z}$; м) $u=\dfrac{2}{z}$;

н) $u=\dfrac{3i}{z}$; о) $u=2\bar{z}+1$; п) $u=\bar{z}i-2$;

р) $u=\dfrac{2}{\bar{z}}+i$; с) $u=\dfrac{z}{\bar{z}}-i$;

4.4. Комплекс саннардан тамыр алу.

Бу бүлектәге мисаллар теләсә нинди n нче дәрәҗә тамыр алу белән бәйле. Аларның кайберләренең чишү юлларын карап китик.

1. Бирелгән тамырларның барлык кыйммәтләрен табыгыз.

а) $\sqrt[8]{6}$; б) $\sqrt[6]{-4}$; в) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$.

Чишү. Башта тамыр астында торган санның тригонометрик рәвешен табарга кирәк. Аннан соң әзер формула буенча тамырның барлык кыйммәтләрен тригонометрик рәвештә табып була. Кайвакытта җавапны алгебраик рәвешкә дә китереп була.

а) $6 = 6(\cos 0 + i\sin 0)$;

$$\sqrt[8]{6(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{8} + i\sin\frac{0+2\pi k}{8}\right) =$$

$$= \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4}\right), k = 0,1,\dots,7.$$

$$w_0 = \sqrt[8]{6}(\cos 0 + i\sin 0) = \sqrt[8]{6} ;$$

$$w_1 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ;$$

$$w_2 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[8]{6}i ;$$

$$w_3 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ;$$

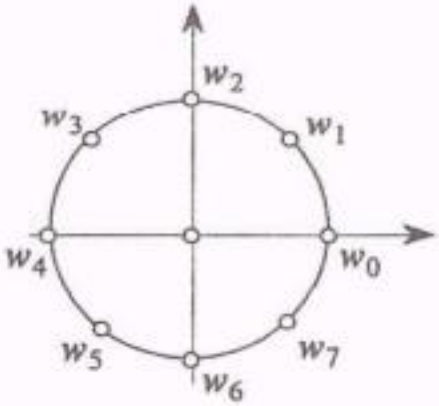
$$w_4 = \sqrt[8]{6}(\cos\pi + i\sin\pi) = -\sqrt[8]{6} ;$$

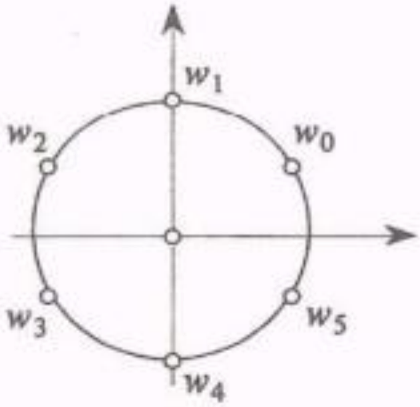
$$w_5 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{6}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) ;$$

$$w_6 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[8]{6}i ;$$

$$w_7 = \sqrt[8]{6}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Бу кыйммәтләрнең геометрик сурәте – үзәге $(0;0)$, радиусы $\sqrt[8]{6}$ булган әйләнәнең Ox күчәре белән кисешү ноктасыннан башлап, 8 тигез кисәккә бүленеп табылган нокталар (рәс. 27).





Рәс. 27 *Рәс. 28*

б) $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$;

$$\sqrt[6]{-4} = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), k = 0,1,2,3,4,5.$$

$$w_0 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) ;$$

$$w_1 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[6]{4} \cdot i ;$$

$$w_2 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right);$$

$$w_3 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) ;$$

$$w_4 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[6]{4}i ;$$

$$w_5 = \sqrt[6]{4}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[6]{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

Бу саннар радиусы $\sqrt[6]{4}$ булган әйләнәне 6 тигез кисәккә бүләләр (рәс.28).

в) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{3} - i}{-1 + i}}$.

$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$, $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ булганга күрә,

$$\frac{\sqrt{3} - i}{-1 + i} = \sqrt{2}\left(cos\frac{13\pi}{12} + isin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Димәк, $\sqrt[5]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}} = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{\frac{13\pi}{12}+2\pi k}{5} + isin\frac{\frac{13\pi}{12}+2\pi k}{5}\right), k = 0,1,2,3,4.$

$$w_0 = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{13\pi}{60} + isin\frac{13\pi}{60}\right);\ w_1 = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{37\pi}{60} + isin\frac{37\pi}{60}\right);$$

$$w_2 = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{61\pi}{60} + isin\frac{61\pi}{60}\right);\ w_3 = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{85\pi}{60} + isin\frac{85\pi}{60}\right);$$

$$w_4 = \sqrt[10]{2}\left(cos\frac{96\pi}{60} + isin\frac{96\pi}{60}\right).$$

Бу кыйммәтләр дә радиусы $\sqrt[10]{2}$ булган әйләнәне 5 тигез кисәккә бүлү нокталары.

2. $z^3 = \frac{1-i}{1+i}$ шартын канәгатьләндергән комплекс z саннарын табыгыз.

Чишү. Мондый мәсьәләләр уң яктагы саннан тамыр алуга кайтып кала. Бу мисалда $z = \sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{(1-i)^2}{2}} = \sqrt[3]{-i}.$

$$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}$$

булу сәбәпле,

$$\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{-i} = \cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}, k = 0,1,2.$$

Димәк, $z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} == \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

Бу мисалны комплекс саннарның алгебраик рәвешеннән файдаланып чишү юлын элегрәк караган идек инде.

3. $z^4 = \sqrt{3} - i$ шартын канәгатьләндергән барлык комплекс z саннарның суммасын табыгыз.

Чишү. Бирелгән үзлеккә ия булган z_0, z_1, z_2, z_3 саннары $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$ ның барлык кыйммәтләре була. Алар

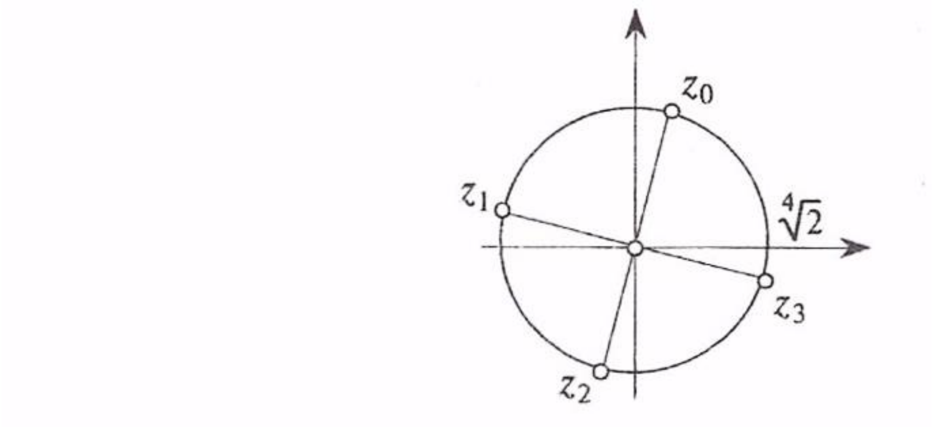
$z_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3,\ldots$ формуласы буенча табыла. Моннан

$$\arg z_0 = \frac{11\pi}{24}, \qquad \arg z_1 = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2}, \qquad \arg z_2 = \frac{11\pi}{24} + \pi,$$

$$\arg z_3 = \frac{11\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{2} + \pi$$

икәнен күрәбез (рәс.29). Димәк, $z_2 = -z_0, z_3 = -z_1$. Шуңа күрә

$$z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$



Рәс.29

4. Бердән n нчы дәрәҗә барлык тамырларның суммасын һәм тапкырчыгышын табыгыз.

Чишү. 1 нче юл. $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ булсын. Бу вакытта

$$f(x) = x^n - 1 = (x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1) \dots (x - \varepsilon_{n-1}).$$

Виет теоремасы буенча $f(x)$ күпбуыны тамырларның суммасы аның x^{n-1} янындагы капма-каршы тамга белән алынган коэффициентына, ә тапкырчыгышы $(-1)^n$ тамгасы белән алынган ирекле буынга тигез булырга тиеш. Димәк,

$$S = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} = 0,$$
$$P = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_{n-1} = (-1)^n \cdot (-1) = (-1)^{n+1}.$$

2 нче юл. $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 -$ төп тамыр булу сәбәпле,

$$S = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \dots + \varepsilon_{n-1} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_1^{n-1} = \frac{1 - \varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1} = \frac{1 - 1}{1 - \varepsilon_1} = 0$$

(монда геометрик прогрессиянең беренче n буынының суммасы формуласы файдаланылды).

$$P = 1 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_1^{n-1}.$$

$$\arg P = 0 + \frac{2\pi}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n} + 3 \cdot \frac{2\pi}{n} + \dots + (n-1) \cdot \frac{2\pi}{n} =$$

$$= \frac{2\pi}{n}\big(1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\big) = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} = (n-1)\pi$$

(монда арифметик прогрессиянең беренче n буынының суммасы формуласы файдаланылды), $|P| = 1$ булу сәбәпле,

$(n-1)$ җөп сан булса, $P = 1$, $(n-1)$ так сан булса, $P = -1$.

Ягъни $P = (-1)^{\mathrm{n}-1} = (-1)^{\mathrm{n}+1}$.

5. $(1-i)^3 = -2-2i$ шартыннан файдаланып, $\sqrt[3]{-2-2i}$ нең барлык кыйммәтләрен табыгыз.

Чишү. Бирелү буенча $\sqrt[3]{-2-2i} = 1-i$. Әгәр $\sqrt[3]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ булса, безгә кирәк кыйммәтләрне $(1-i)\cdot\varepsilon_{\mathrm{k}}$ формуласы буенча табып була. $\varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \varepsilon_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ булганга күрә,

$$\sqrt[3]{-2-2i} = \left\{1-i, (1-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), (1-i)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right\} =$$

$$= \left\{1-i, \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i, \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Мисаллар

4.1. Бирелгән тамырларның барлык кыйммәтләрен табыгыз:

а) $\sqrt[6]{-i}$; *б)* $\sqrt[4]{i}$; *в)* $\sqrt[3]{8}$; *г)* $\sqrt[5]{-32}$

д) $\sqrt[4]{-16}$; *е)* $\sqrt[5]{\frac{8+24i}{3-i}}$; *ж)* $\sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}}$; *з)* $\sqrt[10]{\frac{1+i}{1-i}}$;

и) $\sqrt[4]{(2-2i)\cdot\frac{(1+i\sqrt{3})}{1+i}}$; *к)* $\sqrt[5]{\frac{(-1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2}}$; *л)* $\sqrt[6]{\frac{(-1+i)^4}{2+2\sqrt{3}i}}$.

4.2. Тигезләмәләрне чишегез:

а) $z^2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; *б)* $z^3 = -i$; *в)* $z^3 = -2-2i$;

г) $z^6 + i = 0$; *д)* $z^4 = -1-i\sqrt{3}$; *е)* $z^5 - 1 = 0$;

ж) $z^5 - 2 = 0$.

4.3. $z^4 = 1 - i\sqrt{3}$ шартын канәгатьләндергән барлык комплекс z саннарының суммасын табыгыз.

4.4. Бирелгән тамырларның барлык кыйммәтләрен һәм аларның геометрик сурәтен табыгыз:

а) $\sqrt[8]{1}$; б) $\sqrt[12]{1}$; в) $\sqrt[16]{1}$.

4.5. $(1+i)^3 = -2+2i$ шартыннан файдаланып, $\sqrt[3]{-2+2i}$ нең барлык кыйммәтләрен табыгыз.

4.6. $(1-i)^4=-4$ шартыннан файдаланып, $\sqrt[4]{-4}$ нең барлык кыйммәтләрен табыгыз.

4.7. $(\sqrt{3}-i)^3=-8\mathrm{i}$ шартыннан файдаланып, $\sqrt[3]{-8i}$ нең барлык кыйммәтләрен табыгыз.

4.8. $(\sqrt{3}-i)^4=-8(1+\sqrt{3}i)$ шартыннан файдаланып, $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$ нең барлык кыйммәтләрен табыгыз.

4.9. Исбатлагыз:

а) Әгәр α,β бердән n нчы дәрәҗә тамырлар булса $\alpha\cdot\beta$ шулай ук бердән n нчы дәрәҗә тамыр була.

б) Әгәр α бердән n нчы дәрәҗә тамыр булса, $\frac{1}{\alpha}$ шулай ук бердән n нчы дәрәҗә тамыр була.

в) Әгәр $\varepsilon_0=1,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}$ бердән n нчы дәрәҗә тамырның барлык кыйммәтләре булса,

$$(1-\varepsilon_1)\cdot(1-\varepsilon_2)\cdot\ldots\cdot(1-\varepsilon_{n-1})=\mathrm{n}$$

г) Әгәр α бердән n нчы дәрәҗә тамыр һәм $\alpha\neq1$ булса,

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=0;$$

$$1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+\mathrm{n}\cdot\alpha^{n-1}=\frac{\mathrm{n}}{\alpha-1}.$$

Әгәр $\alpha=1$ булса, бу мәсьәләнең чишелеше ничек булыр?

д) Әгәр α бердән $2\mathrm{n}$ нчы дәрәҗә төп тамыр булса,

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=\frac{2}{1-\alpha}$$

4.5. Комплекс саннарның кайбер кулланылышлары

Элементар математикада очрый торган күп мәсьәләләрне ***Муавр*** формуласыннан файдаланып чишеп була. Биредә шуларның кайберләрен китерәбез.

1. Кабатлы почмакның синусларын һәм косинусларын бирелгән почмакның синуслары һәм косинуслары аша күрсәтү.

Бер мисал карап китик. Муавр формуласы буенча

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha\,.$$

Икенче яктан, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + i2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,.$

Димәк, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Хәзер $\cos n\alpha$, $\sin n\alpha$ өчен формулалар чыгарыйк.

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\,.$$

Бином формуласы буенча

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + iC_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha +$$
$$+ i^2\cdot C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + + \cdots + i^{n-1}\cdot C_n^{n-1}\cdot\cos\alpha\cdot\sin^{n-1}\alpha +$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\alpha$$

Әгәр $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ икәнен исәп алсак,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (\cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha -$$

$- \ \ldots + M) + i(C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha -$

$- \ \ldots + M_1).$

Димәк, $\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\cdot\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\cdot\sin^4\alpha - \ \ldots + M,$

$\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\cdot\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\cdot\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\cdot\sin^5\alpha -$

$- \ \ldots + M_1.$

Биредә $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, M һәм $M_1 - n$ саны белән бәйле буыннар. Әгәр n җөп сан булса, $M = (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\alpha$, $M_1 = (-1)^{\frac{n}{2}-1}n\cdot\cos\alpha\cdot\sin^{n-1}\alpha$. Әйтик, $n = 4$ булса,

$$M = \sin^4\alpha\,, M_1 = -4\ \cos\alpha\cdot\sin^3\alpha\,, C_4^1 = 4, C_4^2 = 6, C_4^3 = 4.$$

Шуңа күрә

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha + \sin^4\alpha\,,$$
$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\cdot\sin\alpha - 4\cos\alpha\cdot\sin^3\alpha.$$

Әгәр n так сан булса, $M = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n\cdot\cos\alpha\cdot\sin^{n-1}\alpha.$

$M_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\alpha$. Әгәр $n = 5$ булса, $M = 5\cos\alpha\cdot\sin^4\alpha,$

$$M_1 = \sin^5\alpha,\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = 10,\ C_5^3 = \ 10,\ C_5^4 = \ 5.$$

Бу вакытта,

$$\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\cdot\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\cdot\sin^4\alpha\,,$$
$$\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\cdot\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\cdot\sin^3\alpha + \sin^5\alpha.$$

Шулай итеп, теләсә нинди $n \in N$ өчен $\cos n\alpha$ һәм $\sin n\alpha$ ны $\cos\alpha$ һәм $\sin\alpha$ аша күрсәтеп була.

2. Тригонометрик функцияләрнең дәрәҗәләрен киметү.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ булса,

$\bar{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha = \frac{1}{z} = z^{-1} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$.

Шуңа күрә $z^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha$,

$z^{-k} = \cos k\alpha - i\sin k\alpha$,

Моннан $\cos k\alpha = \frac{z^k + z^{-k}}{2}$, $\sin k\alpha = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}$ икәнен күрәбез. $k = 1$ булганда, $\cos\alpha = \frac{z+z^{-1}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{z-z^{-1}}{2i}$.

Бу формулаларны синус һәм косинусның дәрәҗәләрен киметү формулаларын чыгару өчен кулланырга мөмкин.

Мәсәлән,

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{z^2 + z^{-2} + 2}{4} = \frac{2\cos 2\alpha + 2}{4} = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$sin^2\alpha = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^2 = \frac{z^2 + z^{-2} - 2}{-4} = \frac{2\cos 2\alpha - 2}{-4} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha).$$

Бу формулаларны чыгару мәктәп программасында каралган. Алар *тригонометрик функцияләрнен дәрәжәләрен киметү формулалары* дип атала.

3. Аргументлары арифметик прогрессия тәшкил иткән синусларның һәм косинусларның суммаларын исәпләү.

Без $S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx$,

$T = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$.

суммаларын табу формулаларын чыгарабыз.

Әгәр $z = \cos\frac{x}{2} + i\sin\frac{x}{2}$ булса, $S + Ti = z^2 + z^4 + z^6 + \cdots + z^{2n} -$ тапкырлыгы z^2 булган геометрик прогрессиянең суммасы. Димәк, $S + Ti = \frac{z^{2n}\cdot z^2 - z^2}{z^2 - 1} = \frac{z^2\cdot z^n(z^n - z^{-n})}{z(z - z^{-1})} = \frac{z^{n+1}(z^n - z^{-n})}{z - z^{-1}} =$

$= \left(\cos(n+1)\frac{x}{2} + i\sin(n+1)\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Моннан $S = \cos(n+1)\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$, $T = \sin(n+1)\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ икәнен күрәбез.

Әйтик, $n = 6$ булса

$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x = \cos\frac{7x}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}$,

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = \sin\frac{7x}{2}\cdot\frac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}}$

4. Биномиаль коэффициентлардан төзелгән суммаларны исәпләү.

Без $S = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots, T = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ \ldots$ суммаларын табу формулаларын чыгарырбыз.

Муавр формуласыннан файдаланып,

$$(1+i)^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

икәнен табабыз. Бином формуласы буенча

$$(1+i)^n = 1^n + C_n^1\cdot i + C_n^2\cdot i^2 + C_n^3\cdot i^3 + C_n^4\cdot i^4 + \ \ldots = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 +$$
$$+ i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ \ldots).$$

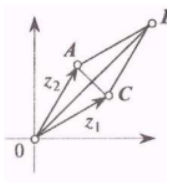
Димәк, $S = \sqrt{2^n}\cdot\cos\frac{\pi n}{4},\ T = \sqrt{2^n}\cdot\sin\frac{\pi n}{4}$.

Мисал өчен, $n = 6$ булса, югарыдагы формулалардан файдаланып, $S = 1 - C_6^2 + C_6^4 - C_6^6 = 8\cdot\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $T = C_6^1 - C_6^3 + C_6^5 = 8\cdot\sin\frac{3\pi}{2} = -8$ икәнен күрәбез. $C_6^1 = 6, C_6^2 = 15,\ C_6^3 = 20, C_6^4 = 15, C_6^5 = 6,\ C_6^6 = 1$ икәнен исәпкә алсак, чыннан да, $S = 1 - 15 + 15 - 1 = 0,\ T = 6 - 20 + 6 = -8$ була.

5. Комплекс саннарны куллану кайвакытта геометрик мәсьәләләрне чишүне җиңеләйтә. Бу бүлектә бирелгән мәсьәләләрне чишкәндә, комплекс санның геометрик сурәтенең хОу яссылыгындагы вектор яки нокта икәнен истә тотарга кирәк. Берничә мисал карап китик.

1) Ромб диагональләренең квадратлары суммасы аның якларының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатларга.

Исбатлау. Шарт буенча $c = |z_1| = |z_2|$ −ромб якларының



Рәс.30

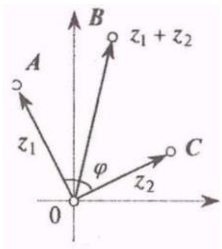
озынлыгы, $|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|$ – ромб диагональләре озынлыгы (рәс.30). $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$ икәнен исбатларга кирәк. $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ тигезлеген исәпкә алсак,

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)\cdot(\overline{z_1-z_2})=$$
$$=(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2)\cdot(\overline{z_1}-\overline{z_2})=$$
$$=z_1\cdot\overline{z_1}+z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\overline{z_2}+z_1\cdot\overline{z_1}-z_1\cdot\overline{z_2}-z_2\cdot\overline{z_1}+z_2\cdot\bar{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2=4c^2$$

Безгә кирәк булган тигезлек табылды.

2) Әгәр $\boldsymbol{z_1\neq z_2}$ комплекс саннары өчен $|\boldsymbol{z_1}+\boldsymbol{z_2}|=|\boldsymbol{z_1}-\boldsymbol{z_2}|$ шарты үтәлсә, түбәләре $(\mathbf{0};\mathbf{0}),\boldsymbol{z_1},\boldsymbol{z_2},\boldsymbol{z_1}+\boldsymbol{z_2}$ нокталары булган дүртпочмаклык турыпочмаклык була. Исбатларга.

Исбатлау.



Рәс.31

$|z_1+z_2|,|z_1-z_2|-$яклары,z_1,z_2 булган $OABC$ параллелограммының диагональләре (рәс.31). Бирелгән буенча $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Димәк, $|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$, ягъни

$$(z_1+z_2)\cdot(\overline{z_1+z_2})=(z_1-z_2)\cdot(\overline{z_1-z_2})$$

Моннан $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=0$ икәнен табабыз. Әгәр $z_1=(a,b)$, $z_2=(c,d)$ булса, $z_1\cdot\overline{z_2}+z_2\cdot\overline{z_1}=2(ac+bd)$. Димәк, $ac+bd=0$. Ләкин, геометриядән билгеле булганча, $z_1=(a,b)$ һәм $z_2=(c,d)$ векторларның скаляр тапкырчыгышы $(z_1,z_2)=ac+bd$ була. Икенче яктан, билгеләмә буенча $(z_1,z_2)=|z_1||z_2|\cdot\cos\varphi$. $|z_1|\neq 0,|z_2|\neq 0$ булу сәбәпле, $\cos\varphi=0$. Шулай булгач, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Димәк, $OABC$ – турыпочмаклык була.

Мисаллар

5.1. $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ аша күрсәтегез:

а) $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$ ны; *б)* $\cos 6\alpha$, $\sin 6\alpha$ ны;

в) $\cos 7\alpha$, $\sin 7\alpha$ ны; *г)* $\cos 8\alpha$, $\sin 8\alpha$ ны.

5.2. Исбатлагыз:

а) $\frac{\cos n\alpha}{cos^n\alpha} = 1 - C_n^2 \cdot tg^2\alpha + C_n^4 \cdot tg^4\alpha + \cdots + A,$

биредә $A = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot tg^n\alpha$, әгәр n — җөп булса.

$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot n \cdot \mathrm{tg}^{n-1}\,\alpha$, әгәр n – так булса.

б) $\frac{\sin n\alpha}{\cos^n\alpha} = C_n^1 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - C_n^3 \cdot \mathrm{tg}^3\,\alpha + C_n^5 \cdot \mathrm{tg}^5\,\alpha + \cdots + A,$

биредә $A = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \cdot n \cdot \mathrm{tg}^{n-1}\,\alpha$, әгәр n – җөп булса.

$A = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \mathrm{tg}^n\,\alpha$, әгәр n – так булса.

5.3. $\mathrm{tg}\,4\alpha, \mathrm{tg}\,5\alpha, \mathrm{tg}\,7\alpha$ ны $\mathrm{tg}\,\alpha$ аша күрсәтегез.

5.4. $\mathrm{ctg}\,3\alpha, \mathrm{ctg}\,5\alpha, \mathrm{ctg}\,6\alpha$ ны $\mathrm{tg}\,\alpha$ аша күрсәтегез.

5.5. $\cos^3\alpha,\ \sin^3\alpha,\ \cos^4\alpha,\ \sin^4\alpha$ функцияләренең дәрәҗәләрен киметегез.

5.6. Исбатлагыз:

а) $S = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, $x \neq \pi k$.

б) $T = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \cdots + \sin(2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$,

в) $S = \cos\dfrac{\pi}{11} + \cos\dfrac{3\pi}{11} + \cos\dfrac{5\pi}{11} + \cos\dfrac{7\pi}{11} + \cos\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}$,

г) $T = \sin\dfrac{\pi}{11} + \sin\dfrac{3\pi}{11} + \sin\dfrac{5\pi}{11} + \sin\dfrac{7\pi}{11} + \sin\dfrac{9\pi}{11} = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\dfrac{5\pi}{11}$,

д) $S = 1 + n \cdot \cos\varphi + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \cos 2\varphi + \cdots + C_n^n \cdot \cos n\varphi =$

$= 2^n \cdot \cos^n\dfrac{\varphi}{2} \cdot \cos\dfrac{n\varphi}{2}$,

е) $T = n \cdot \sin\varphi + \dfrac{n(n-1)}{2} \cdot \sin 2\varphi + \cdots + C_n^n \cdot \sin n\varphi =$

$= 2^n \cdot \cos^n\dfrac{\varphi}{2} \cdot \sin\dfrac{n\varphi}{2}$.

5.7. Кисемтә ниндидер z_1, z_2 комплекс саннары белән бирелсә, бу кисемтәнең уртасына нинди комплекс сан тиңдәш булыр? z_1 очыннан башлап кисемтәне $1:4$ чагыштырмасында бүлү ноктасы нинди комплекс сан белән бирелер?

5.8. Квадратның үзәге $z_0 = 1 + i$ ноктасында, түбәләренең берсе $z_1 = 1 - i$ ноктасында булса, калган түбәләренә тиңдәш булган комплекс саннарны табыгыз.

5.9. Параллелограмм диагональләренең квадратлары суммасы аның якларының квадратлары суммасына тигез икәнен исбатлагыз.

5.10. $ABCD$ параллелограммының A, B, C түбәләре $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 1 + i$ булса, дүртенче түбәсе нинди комплекс сан белән бирелер? Шушы ук мәсьәләне теләсә нинди z_1, z_2, z_3 саннары өчен гомумиләштерегез.

5.11. ABC өчпочмагының түбәләре z_1, z_2, z_3 комплекс саннары булса, бу өчпочмактан параллелограммнар төзүче нокталарга тиңдәш булган барлык комплекс саннарны табыгыз.

5.12. ABC өчпочмагының түбәләре $z_1 = 3 + i,\ z_2 = 5 + 3i,\ z_3 = \left(7 - 2\sqrt{3}\right) + + 3i$ булса, бу өчпочмакның якларын һәм почмакларын табыгыз.

5.13. Үзәге $(0; 0)$ ноктасында, ә яклары координатлар күчәрләренә параллель булган квадрат бирелгән. Әгәр бу квадрат ягының озынлыгы 1 булса, аның түбәләренә тиңдәш булган комплекс саннарны табыгыз.

5.14. Төзек өчпочмакның үзәге $(0; 0)$ ноктасында урнашкан, бер ягы ординатлар күчәренә параллель, ә бер түбәсе тискәре реаль сан белән бирелгән. Әгәр аны камаучы әйләнәнең радиусы 1 булса, түбәләренә тиңдәш комплекс саннарны табыгыз.

5.15. Әгәр $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ һәм $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ булса, z_1, z_2, z_3 комплекс саннарына тиңдәш нокталар берәмлек әйләнәгә камалган өчпочмакның түбәләре булганын исбатлагыз.

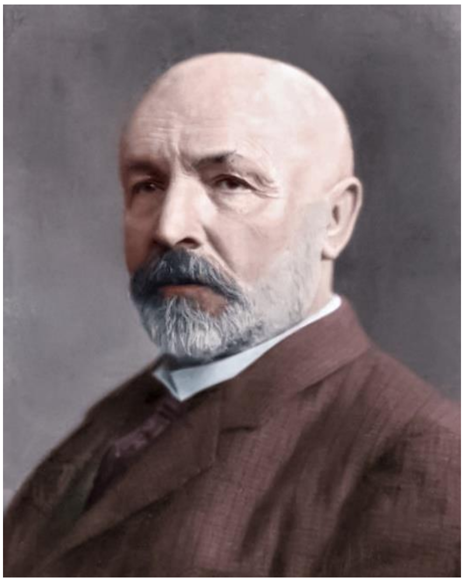
5.16. Әгәр $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ һәм $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0$ булса, z_1, z_2, z_3, z_4 комплекс саннарына тиңдәш нокталар яссылыкта ничек урнашканнар?

5.17. Ике вектор суммасының озынлыгы аларның озынлыклары суммасына тигез булуы өчен бу векторларның юнәлешләре бер үк булуы кирәк һәм шул җитә. Шуны исбатлагыз.

5.18. Ике вектор суммасының озынлыгы аларның озынлыклары аермасына тигез булуы өчен, бу векторларның юнәлешләре капма-каршы булуы кирәк һәм шул җитә. Шуны исбатлагыз.

Тарихи мәгълүмат

Георг Кантор



Георг Кантор (1845–1918) — күренекле немец математигы, күплекләр теориясенең нигезен салучы. Аның хезмәтләре математикада чиксезлек төшенчәсен яңача аңлауны тәэмин итте һәм математик анализ, логика, топология кебек юнәлешләр үсешенә зур өлеш кертте.

Георг Кантор 1845 елның 3 мартында Санкт-Петербург шәһәрендә, алман гаиләсендә туа. Аның атасы Георг Вальдемар Кантор - уңышлы сәүдәгәр, ә әнисе Мария Анна Бём музыка белән кызыксынучы була. 1856 елда, атасының сәламәтлеге какшау сәбәпле, гаилә Германиягә күчә.

Кантор Дармштадт шәһәрендә гимназия тәмамлый, аннары Цюрих политехника институтына укырга керә. Соңрак ул Берлин университетына күчә, анда Карл Вейерштрасс, Эрнст Куммер һәм Леопольд Кронекер кебек танылган галимнәр җитәкчелегендә математика өйрәнә. 1867 елда ул тригонометрия рәтләре турында диссертация яклый.

Георг Кантор Галле университетында укытучы булып эшли башлый һәм шунда ук математика өлкәсендә үзенең иң мөһим ачышларын ясый. 1874 елда ул төрле чиксезлек дәрәҗәләре булуын исбатлый торган хезмәтен бастыра. Бу ачыш күплекләр теориясенең башлангычы буларак кабул ителә.

Кантор күплекләр белән эш итү өчен кардиналь һәм ординаль саннар төшенчәсен кертә, трансфинит саннар теориясен эшли. Ул рациональ саннар күплегенең - санаулы күплек (счётное множество), ә чын саннар күплегенең санаусыз күплек (несчётное множество) булуын исбатлый. Шулай ук ул танылган "континуум гипотезасы"н формалаштыра, аны соңрак математик логиканың төп сорауларының берсе дип таныйлар.

Канторның идеяләре башта тәнкыйтькә дучар була, аеруча Леопольд Кронекер тарафыннан. Кронекер Канторны метафизик ысулларда гаепли һәм аның карашларын кабул итми. Бу тәнкыйть Канторның шәхси тормышына да йогынты ясый.

1874 елда Кантор Вали Гутманга өйләнә. Аларның алты баласы була.

1910 еллардан башлап, аның сәламәтлеге начарлана һәм ул фәнни эшчәнлекне ташларга мәҗбүр була. Георг Кантор 1918 елның 6 гыйнварында Галле шәһәрендә вафат була.

Математикага керткән өлеше

Канторның күплекләр теориясе хәзерге математика нигезләренең берсе булып тора. Аның ачышлары математик логика, анализ, топология һәм хәтта информатика үсешенә зур йогынты ясады. Ул вакытта революцион саналган концепцияләр хәзерге вакытта математика һәм фәлсәфә өлкәсендә үзәк урын били.

Канторның эшчәнлеге чиксезлек төшенчәсен аңлауны үзгәртте һәм математика фәненең яңа алымнары өчен нигез булды. Бүген аны дөньякүләм математика үсешенә иң зур өлеш керткән галимнәрнең берсе дип таныйлар.

Георг Канторның башка галимнәр белән мөнәсәбәтләре күп кенә драматик һәм кызыклы мизгелләргә бай. Бу вакыйгалар, аның фәнни карьерасына һәм шәхси тормышына җитди йогынты ясап, математика тарихында истәлекле урын алган.

Кантор тормышындагы иң билгеле конфликт Леопольд Кронекер белән бәйле. Кронекер Канторның укытучысы булган, һәм аның фикеренчә, математикалар бары тик төгәл саннар белән эш итәргә тиеш. Кантор исә, күплекләр теориясен үстереп, чиксезлек белән бәйле төшенчәләрне өйрәнә.

Кронекерның тәнкыйтенә карамастан, Кантор Карл Вейерштрасс һәм Рихард Дедекинд кебек галимнәрдән ярдәм таба. Вейерштрасс, заманның иң зур математикларыннан берсе, Канторның идеяләренең тирәнлеген аңлый һәм аның карьерасының башлангыч чорында булыша.

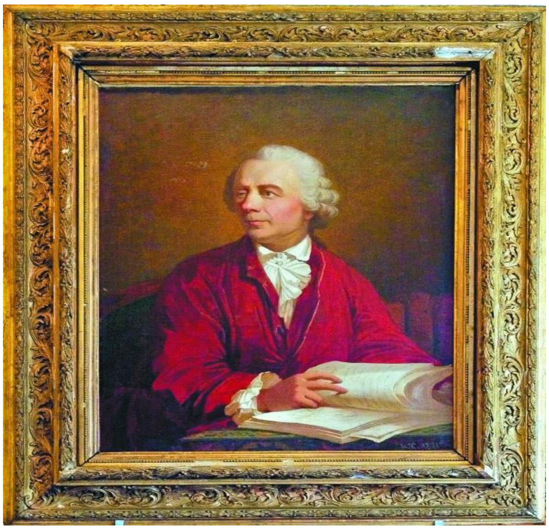
Рихард Дедекинд шулай ук Канторның теориясен таный һәм аны хуплый. Алар хат алыша, һәм бу аралашу Канторның идеяләренә ышанычын арттыра.

Француз галиме һәм философы Анри Пуанкаре Канторның хезмәтләренә скептик караштa була. Ул күплекләр теориясен артык "абстракт" дип таба һәм аны "математика өчен куркыныч" дип саный. Пуанкаре хәтта теорияне "авыру" дип атый, һәм математика аннан савыгырга тиеш дип белдерә.

Кантор үзенең чиксезлек теориясен дини төшенчәләр белән бәйләп караган. Ул католик теолог Франц Брентано белән хат алышкан һәм математик чиксезлекне Алла белән бәйләргә тырышкан.

Бу мисаллар Георг Кантор тормышының никадәр каршылыклы булуын күрсәтә. Күп кенә галимнәрнең каршы чыгуларына карамастан, ул заманча математиканың нигезләрен салган. Аның хезмәтләре һәм идеяләре галимнәр арасында бәхәсләр кузгатып, фән үсешенә зур этәргеч биргән. Бүген Кантор “Күплекләр теориясе” белән математика тарихында тирән эз калдырган галимнәрнең берсе дип таныла.

Леонард Эйлер: математиканың һәм фәннең гениаль вәкиле



Леонард Эйлер (1707–1783) — швейцар математигы, механигы, физигы һәм астрономы, тарихтагы иң нәтиҗәле эшләүче һәм тирән белемле галимнәрнең берсе. Аның фәнгә керткән өлеше искиткеч зур, һәм ул хезмәтләр бүгенге математика һәм фән нигезләренең бер өлеше булып тора.

Леонард Эйлерның иң танылган портретларының берсе 1753 елда швейцар рәссамы Я. Э. Хандманн тарафыннан ясалган. Бу портретта Эйлер эш өстәле артында, кулына китап тоткан хәлдә сурәтләнгән. Әлеге рәсем бүгенге көндә Мюнхендагы Немец музеенда саклана.

Моннан тыш, 1778 елда рәссам И. Ф. А. Дарбес Эйлерның тагын бер портретын иҗат иткән. Бу әсәрдә галимнең олы яшьтәге чагы сурәтләнгән һәм ул Санкт-Петербургтагы Третьяков галереясендә урнашкан.

Эйлерның портреты Швейцариянең 10 франклык банкнотларында һәм Россия, Швейцария, Германия почта маркаларында да урын алган.

Балачак еллары

Эйлер 1707 елның 15 апрелендә Базель шәһәрендә, Швейцариядә туа. Аның атасы, Пауль Эйлер, лютеран пасторы була, ә әнисе Маргрет Брюкер - йорт хуҗабикәсе. Пауль Эйлер үзе дә математика белән кызыксына һәм улының сәләтен кечкенәдән үк күрә.

Леонард башлангыч белемне гаиләдә ала, аннары Базель университетына укырга керә. Анда ул танылган математик Иоганн Бернулли җитәкчелегендә математика өйрәнә. Эйлер 16 яшендә магистр дәрәҗәсен ала, бу аның искиткеч талантын күрсәтә.

Фәнни карьерасы

Эйлерның фәнни карьерасы Россиядә башлана. 1727 елда ул Санкт-Петербургка күчә һәм Петербург Фәннәр академиясендә эшли башлый. Монда ул механика, математика, астрономия һәм башка фәнни юнәлешләрдә актив эшчәнлек алып бара.

1741 елда ул Берлин Фәннәр академиясенә чакырыла һәм 25 ел анда эшли. Берлинда Эйлер күп кенә хезмәтләр яза һәм фәнни дөньяда зур абруй казана. 1766 елда ул яңадан Санкт-Петербургка кайта һәм гомеренең соңгы көннәренә кадәр шунда эшли.

Леонард Эйлерның фәнни эшчәнлеге искиткеч зур: ул математика, физика, механика, астрономия һәм хәтта музыка теориясе өлкәләрендә меңләгән эш бастырган. Аның фәнгә керткән төп хезмәтләре түбәндәгеләр:

Ул аналитик геометрия һәм тригонометрияне үстергән, дифференциаль һәм интеграль исәпләү нигезләрен камилләштергән.. Эйлер $e^{ix} = \cos x + i sin\, x$ формуласы белән танылган. Ул уйланма берәмлекне $(i = \sqrt{-1})$ киң кулланышка кертү һәм аны тригонометрия белән бәйләү буенча зур эш башкарган. Эйлер "Кенигсберг күперләре" мәсьәләсен чишеп, графлар теориясенең нигезен салган.

Ул сыеклыклар механикасы, катлаулы системалар динамикасы һәм башка өлкәләрдә эшләгән. Аның исеме белән аталган Эйлер-Лагранж мәсьәләләре бүген дә актуаль. Эйлер планеталар хәрәкәте, Ай орбитасы һәм Кояш системасының төзелеше турында хезмәтләр язган. Эйлерның гади тел белән язылган хезмәтләре фәнне киң катлам укучыларга аңлаешлы иткән.

Шәхси тормышы

Эйлерның шәхси тормышы фәнгә бирелгәнлек белән сугарылган. Ул ике тапкыр өйләнгән һәм 13 бала атасы булган. Ләкин балаларының күбесе яшьли вафат булган. Сәламәтлеге начараюга карамастан, Эйлер эшчәнлеген дәвам итә. Ул бер күзен югалта, аннары тулысынча сукырая, ләкин хәтеренең искиткеч яхшы булуы аркасында, фәнни эшләрен туктатмый. Эйлер 1783 елның 18 сентябрендә Санкт-Петербургта вафат була.

Леонард Эйлер, даһи галим буларак, күп кенә коллегалары белән актив аралашкан.

Эйлер яшьтән үк Бернулли гаиләсенең йогынтысында булган. Иоганн Бернулли аның остазы була һәм аңа математик анализның иң алдынгы концепцияләрен өйрәтә. Эйлер Даниил Бернуллины "математикада икенче атам" дип атаган.

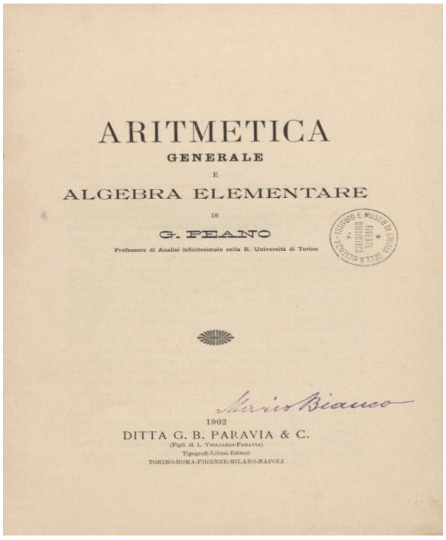
Эйлерның Даниил Бернулли белән дуслыгы аларның озакка сузылган хезмәттәшлегенә нигез салган. Ике галим дә Санкт-Петербург Фәннәр академиясендә бергә эшләгән һәм механика белән гидродинамика өлкәсендә хезмәттәшлек иткән. Аларның Бернулли тигезләмәсе турындагы эшләре хәзерге тикшеренүләр өчен нигез булып тора.

Эйлер яшь Лагранжның сәләтен, бигрәк тә аның механика буенча эшен югары бәяли. Яшь аермасына карамастан, аларның хезмәттәшлеге уңышлы була. Эйлер Лагранжның идеяләрен танытырга ярдәм итә, аны заманның күренекле галимнәренең берсе итә.

Эйлер һәм француз галиме Д'Аламбер арасында катлаулы мөнәсәбәтләр булган. Алар механика буенча, аерым алганда, Д'Аламбер принцибы һәм аны динамикада куллану турында бәхәсләшкән. Бәхәсләр шәхси дошманлыкка барып җитмәсә дә, алар математиканың һәм физиканың төрле алымнарын күрсәтеп торган.

Санкт-Петербургта Эйлер Россия фәнни җәмгыяте хуплавын ала. Фәннәр академиясе аның өчен үзенчәлекле "өй" була, һәм шунда ул үз сәләтен тулысынча ача. Михаил Ломоносов кебек коллегалары белән мөнәсәбәтләре үзара хөрмәткә нигезләнгән.

Джузеппе Пеано



Джузеппе Пеано (1858–1932) — күренекле итальян математигы һәм логигы, математиканы формалаштыру һәм аксиоматизацияләү өлкәсенә зур өлеш керткән шәхес. Аның *Пеано аксиомалары* натураль саннар теориясенең нигезе булып тора.

Джузеппе Пеано 1858 елның 27 августында Италиянең Кунео шәһәре янындагы Спинетта авылында туа. Ул крестьян гаиләсендә үсә, математикага сәләте кечкенә вакытта ук күренә. Башлангыч мәктәпне тәмамлаганнан соң, ул Турин университетына укырга керә һәм анда математика белән тирәнтен шөгыльләнә. 1880 елда университетны уңышлы тәмамлап, математика докторы дәрәҗәсен ала. Аннары шул университетта укытучы булып эшли башлый.

Фәнни эшчәнлеге

Джузеппе Пеано математиканың һәм математик логиканың мөһим өлкәләрендә эшли. Ул математик төшенчәләрне формалаштыруда алда баручыларның берсе булган.

Пеано аксиомалары: 1889 елда ул *"Аксиомалар методы белән бирелгән арифметика"* исемле хезмәтен бастыра. Әлеге хезмәтендә ул натураль саннарны тасвирлаучы аксиомалар системасын формалаштыра. Бу аксиомалар:

1. Бернең беренче натураль сан булуы.
2. Һәр санның үзеннән соң килә торган икенче саны булуы.
3. Математик индукция принцибы.

Пеано аксиомалары хәзерге заман натураль саннар теориясенең нигезе булып тора һәм математик логиканың мөһим өлеше булып санала.

Математик логика һәм тел: Пеано математик төшенчәләрне тасвирлау өчен үзенең формаль телен — *Пеано латин телен* булдырган. Бу математика фәнен катгый һәм төгәл фән итеп формалаштырудагы беренче омтылышларның берсе булган.
Геометрия һәм анализ: Аксиоматикадан тыш, Пеано анализ һәм геометриягә дә зур өлеш керткән. Аның эшләре арасында яссылыкны тутыручы сызыклар һәм анализны формалаштыруга багышланган хезмәтләр бар.

Пеано теоретик математик булуы белән генә түгел, шулай ук искиткеч педагог булып та танылган. Аның Турин университетындагы лекцияләре студентларны тирән эчтәлек һәм яңалык белән җәлеп иткән.

Шәхси тормышы һәм соңгы еллары

Джузеппе Пеано бар тормышын фәнгә багышлаган тыйнак кеше булган. Аның хезмәт сөючәнлеге һәм математикага мәхәббәте шәхси тормышына аз урын калдырган. Пеано гомере буе укыткан һәм фәнни хезмәтләрен бастырган. Ул 1932 елның 20 апрелендә Турин шәһәрендә вафат була.

Рене Декарт

Рене Декарт (1596–1650) - француз философы һәм математигы. Галим математика фәне үсешенә зур йогынты ясаган.

Шәхси тормышы

Рене Декарт 1596 елның 31 мартында Ла Эйи шәһәрендә (хәзерге Декарт, Франция) туган. Шул шәһәрдәге иезуит колледжында ~~белем алган, анда~~ башлангыч белем алган. Соңрак ул Пуатье университетына укырга кергән, анда хокукны өйрәнгән. Әмма–математика һәм философия белән кызыксынуы аның киләчәктәге карьерасын билгеләгән.

Декарт күп кенә танылган галимнәр һәм философлар белән аралашкан. Ул Бенедикт Спиноза белән дус булган, шулай ук Галилей һәм замандашлары белән хат алышкан.

Декарт бик ябык тормыш алып барган һәм шәхси тормышы турында күп мәгълүмат калдырмаган. Аның 1635 елда хезмәтчесе Елена белән булган мөнәсәбәтеннән Франсина Декарт (Francine Descartes, 1635-1640) исемле кызы туган, ләкин ул озак яшәмәгән, биш яшендә вафат булган. Кызының үлемен Декарт үзенең тормышындагы иң авыр кайгы дип бәяләгән.

Декартның күпчелек тормышы Нидерландта узган, анда ул фәнни тикшеренүләр һәм философик уйланулар белән шөгыльләнгән.

Фәнни эшчәнлеге

Декарт аналитик геометриягә нигез салучы булып санала, ул алгебра һәм геометрияне берләштерә. Декарт координатлар системасын тирәнтен өйрәнә, анда һәрбер нокта яссылыкта ике сан - (x, y) белән билгеләнә. Бу геометрик фигураларны (мәсәлән, сызыклар һәм түгәрәкләр) алгебраик тигезләмәләр белән тасвирлау мөмкинлеген бирә.

Декартның "La Géométrie" (1637) хезмәтендә алгебраик тигезләмәләрнең геометрик мәсьәләләрне чишүдә кулланылышы күрсәтелгән. Бу математиканы системалы итү юлында беренче адым була.

Декарт, координатлар концепциясен тирәнтен тикшереп, геометрик объектларны математик рәвештә тасвирлау мөмкинлеген күрсәтә. Бу хезмәтләр аналитик геометрия һәм математик анализ үсешендә зур роль уйный. Координатлар методы физика, инженерлык эше һәм башка фәннәрдә яңа мөмкинлекләрне ача.

Декартның математика философиясенә керткән хезмәтләре дә зур әһәмияткә ия. Ул математикада аксиомалар һәм теоремаларга нигезләнгән системаның әһәмиятен күрсәтә. Бу математик логика нигезләренә зур йогынты ясый. Декартның идеяләре XVII-XVIII гасырларда математика үсешенә зур этәргеч бирә.

Карл Фридрих Гаусс

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – алман математигы, физик һәм астроном, ул математика һәм физика үсешенә зур өлеш кертә.

Аның тормышы һәм эшчәнлеге күп кенә мөһим казанышлар белән билгеләнә, алар математика һәм башка фәннәрнең йөзен үзгәртә.

Карл Фридрих Гаусс 1777 елның 30 апрелендә Германиянең Брауншвейг шәһәрендә туган. Аның әтисе - ташчы, әнисе өй хуҗасы була. Гаусс гаиләдәге бердәнбер бала булып, кечкенәдән үк математикага искиткеч сәләтен күрсәтә. 1788 елда ул мәктәпкә йөри башлый. Укытучылары аның талантын күрә һәм Гаусс бик тырышып математика өйрәнә башлый.

1792 елда Гаусс Геттинген университетына укырга керә, анда математика, физика һәм философия өйрәнә. Университетта укыганда, киләчәктәге остазы Абрахам Каестнер белән таныша, ул аның математик сәләтен үстерүдә ярдәм итә.

Математикага керткән өлеше

Гаусс математика үсешенә зур өлеш кертә. Гаусс гади саннарның таралуы турында фундаменталь теорема эшли, ул “гади саннар теоремасы” дип атала. "Арифметик тикшеренүләр" (1801) дигән хезмәтендә Гаусс үзенең саннар теориясен тәкъдим итә. Гаусс конгруэнцияләр теориясен эшли, ул хәзерге алгебраның нигезен тәшкил итә. Гаусс кәкре һәм өслекләр теориясен тирәнтен өйрәнә, ул хәзерге геометриянең нигезе булып тора. "Гомум кәкре һәм өслекләр теориясе" (1827) дигән хезмәтендә Гаусс кәкре һәм өслекләр теориясен тәкъдим итә.

Гаусс берничә мөһим прибор уйлап таба, шул исәптән: Гаусс магнитометры - бу прибор магнит кырын үлчәү өчен кулланыла, Гаусс телескопы - бу телескоп, Гаусс тарафыннан күк җисемнәрен күзәтү өчен эшләнгән. "Күк җисемнәренең хәрәкәте теориясе" (1809) дигән хезмәтендә Гаусс планеталарның хәрәкәте теориясен тәкъдим итә.

Гаусс-Жордан методы сызыкча тигезләмәләр системасын чишүнең төп методларыннан берсе булып тора. Гаусс методыннан алда сызыкча тигезләмәләр системаларын чишү өчен төрле ысуллар булган. Мәсәлән, Борынгы Мисырда һәм Вавилонда мондый тигезләмәләрне чишү өчен геометрик методлар һәм таблицалар кулланылган. Урта гасырларда һәм Ренессанс дәверендә математиклар актив рәвештә алгебраны үстерә башлыйлар. Бу вакытта урын алыштыру һәм Крамер методы кебек формальләштерелгән методлар барлыкка килә.

Карл Фридрих Гаусс XIX гасыр башында сызыкча тигезләмәләр системасын чишү методларын эзлекле рәвештә берләштереп, яңа ысул тәкъдим итә. 1801 елда "Арифметик тикшеренүләр" исемле хезмәтендә ул алгоритмны тәкъдим итә, ул Гаусс методының нигезе була. Гаусс методында тигезләмәләр системасын эквивалент, ләкин җиңелрәк формага үзгәртү идеясе кулланыла.

Гаусс методын сызыкча алгебрада төп инструмент буларак файдалану киң таралган, ул фән һәм техниканың төрле өлкәләрендә, шул исәптән физика, инженерлык эшендә, икътисадта киң кулланыла. Компьютерларның барлыкка килүе белән, Гаусс методы сызыкча тигезләмәләр системасын чишү өчен санлы методларның нигезе булып тора, бу исә катлаулы проблемаларны чишәргә һәм зур күләмдәге мәгълүматны эшкәртергә мөмкинлек бирде.

Шәхси тормышы

Гаусс ике тапкыр өйләнеп, алты бала тәрбияләгән. Ул хезмәт сөючәнлеге һәм математикага мәхәббәте белән билгеле. Гаусс 1855 елның 23 февралендә Германиянең Геттинген шәһәрендә вафат була.

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ

1. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С. Алгебра. — М.: Просвещение, 1981. — 256 с.
2. Галиева Л. И. и др. Комплекс саннар: математикадан уку ярдәмлеге. — Казань: Мәгариф, 2000. — 67 б.
3. Галиева Л. И. и др. Математика нигезләре: югары уку йортлары өчен уку ярдәмлеге. — Казань: Мәгариф, 2007. — 148 б.
4. Галиева Л. И. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Бинарные отношения». — Казань: КГПУ, 1998. — 52 с.
5. Галяутдинов И. Г. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Метод математической индукции». — Казань: КГПУ, 1994. — 48 с.
6. Галяутдинов И. Г. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Множества и действия над ними». — Казань: КГПУ, 1998. — 56 с.
7. Звавич Л. И., Смирнова В. К., Иванов И. И. Решение экзаменационных задач по алгебре. — М.: Издательский дом "Дрофа", 1996. — 128 с.
8. Комплексные числа / под ред. Галяутдинова И. Г. — Казань: КГПУ, 1996. — 24 с.
9. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979. — 392 с.
10. Куликов Л. Я., Москаленко А. И., Фомин А. А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 216 с.
11. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 456 с.
12. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. — М.: Просвещение, 1966. — 324 с.
13. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964. — 272 с.
14. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
15. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1972. — 384 с.