КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ДВУЯЗЫЧНОЙ (ТАТАРСКО-РУССКОЙ) ОСНОВЕ: ЧАСТЬ 1

учебное пособие

ИКЕТЕЛЛЕ (ТАТАРЧА-РУСЧА) НИГЕЗДӘ ПЕДАГОГИКА ЮНӘЛЕШЕ БУЕНЧА УКУЧЫ СТУДЕНТЛАР ӨЧЕН ЮГАРЫ МАТЕМАТИКА: 1-НЧЕ ӨЛЕШ

уку ярдәмлеге

КАЗАНЬ

2024

УДК
БКК

Рецензент:
физика-математика фәннәре докторы, профессор Н.К Туктамышов;

Китап Татарстан Республикасы дәүләт телләрен һәм Татарстан Республикасында башка телләрне саклау, өйрәнү һәм үстерү буенча Татарстан Республикасы дәүләт программасын үтәү максатында нәшер ителә.

Салехова Л.Л., Зарипова Р.Р., Батрова Н.И.

Г18 «Югары математика. 1-нче өлеш». Уку ярдәмлеге./Л.Л. Салехова, Р. Р. Зарипова, Батрова Н.И.—Казан : 2024.— 151 б.: рәс. б-н.
ISBN 5-7761-1627-9

«Югары математика. 1-нче өлеш» исемле уку ярдәмлеге уку-методик комплектның бер өлешен тәшкил итә, ул икетелле (татарча-русча) нигезендә педагогика юнәлешендә укучы студентлар өчен тәгаенләнгән. Әлеге комплект уку ярдәмлеге һәм практикумнан тора.

Уку ярдәмлегендә күплекләр теориясе, комплекс саннар һәм арифметик вектор пространство буенча теоретик материал тәкъдим ителә.

Практикум уку ярдәмлегенең барлык бүлекләре буенча һәр студентның мөстәкыйль эшләве өчен индивидуаль биремнәрне үз эченә ала.

ЭЧТӘЛЕК

КЕРЕШ СҮЗ

«Югары математика. I бүлек» исемле укыту-методик комплект математиканы ике телдә (татарча-русча) өйрәнүче студентлар өчен төзелде.

Тәкъдим ителгән уку материалын үзләштергәннән соң, бүгенге студентлар — киләчәктәге укытучылар мәктәп һәм гимназияләрдә математиканы татар һәм рус телләрендә укытырга сәләтле булырлар дип ышанабыз. Бу исә ике телдә белем алучыларның интеллектуаль үсешенә ярдәм итәчәк.

Әлеге укыту-методик комплект милли уку йортларында математикадан туган телдә белем бирү традицияләрен уңышлы дәвам итә. Аның нигезен Ләлә Исхак кызы Галиева, Мансур Зыятдин улы Хөснетдинов, Илдар Галәветдин улы Галәветдинов, Наил Кадыйр улы Туктамышов, Михаил Иванович Киндер һәм башка педагог-галимнәр төзеде. Укыту-методик комплект шәхесне үстерүгә юнәлтелгән укыту концепциясенә нигезләнеп эшләнде. Бу — теоретик белемнәрнең мөһимлеген һәм уку процессын аңлау, һәр укучының фәнни мәгълүматны кабул итү сәләтенә туры китереп, интеллектуаль үсешен тәэмин итүне белдерә.

Уку ярдәмлеге дүрт бүлектән тора. Беренче бүлектә алгебра, геометрия һәм математик анализ курсларында кулланылган күплекләр теориясе һәм логика элементлары өйрәнелә.

Икенче бүлектә бинар бәйләнешләр теориясе һәм шул теория буенча мәсьәләләр тәкъдим ителә. Эквивалентлык, тәртип һәм функциональ бәйләнешләрнең үзлекләре, шулай ук аларны тәкъдим итү ысуллары өйрәнелә, күп кенә мәсьәләләр чишелешләре белән бирелә. Бу бүлектә Пеано аксиомаларына нигезләнеп, натураль саннар системасының билгеләмәләре, төп үзлекләре һәм математик индукция методы китерелә.

Өченче бүлектә «Арифметик векторлар пространствосы» теориясе тәкъдим ителә. Бу теория алгебра һәм геометрия курсларының нигезен тәшкил итә. Китапта арифметик векторлар белән гамәлләр һәм аларның үзлекләре карала. Сызыкча бәйлелек һәм бәйсезлек, базис, ранг төшенчәләренә зур игътибар бирелә, алар белән бәйле мисаллар китерелә.

Дүртенче бүлектә комплекс саннарның нигезләре тәкъдим ителә. Комплекс саннарның алгебраик һәм тригонометрик формада язылуы, алар белән гамәлләр һәм гамәлләрнең үзлекләре, комплекс саннарның геометрик интерпретациясе, Муавр формуласы карала.

Уку ярдәмлеге текстта очрый торган математика терминнарының татарча-русча сүзлеге дә бирелә.

Югары математика буенча текстларны редакцияләүдә бәяләп бетергесез өлеш кертүе өчен, филология фәннәре докторы Альбина Газизулла кызы Хәйруллина-Вәлиевага ихлас күңелдән рәхмәтебезне белдерәбез.

Шулай ук китапны әзерләүдә зур ярдәм күрсәткән студентларыбызга олы рәхмәтләребезне әйтәсебез килә.

Авторлар- төзүчеләр.

1 нче бүлек

КҮПЛЕКЛӘР ТЕОРИЯСЕ

§ 1.1. Күплекләр

1.Төп төшенчәләр. Мисаллар

Күплек — ул билгеләнми торган башлангыч төшенчә. Бу төшенчәнең синонимнары — «җыелма», «класс», «система» һ. б. һәр күплек нинди дә булса үзлек яки кагыйдә буенча берләшкән элементлардан тора дип исәпләнә. Мисал өчен, кешеләр күплегенең элементлары — кешеләр, саннар күплегенеке — саннар, өчпочмаклар күплегенеке — өчпочмаклар.

Күплекләрне — баш латин хәрефләре, аларның элементларын юл латин хәрефләре белән билгелиләр. Мәсәлән, A, B, C һ. б.

a элементының M күплегенә керүе «$a \in M$» дип языла. Бу язылу «а элементы М күплегенә керә» яки «М күплеге а элементын үз эченә ала» дип укыла.

Әгәр ***a*** элементы M күплегенә кермәсә, «$a \notin M$» **(*a*** элементы M күплегенә керми яки M күплеге ***a*** элементын үз эченә алмый) дип языла.

Әгәр теләсә нинди объект турында аның бу күплеккә керүен яки кермәвен әйтеп булса, күплек *бирелгән* дип исәпләнелә. Чикле сандагы элементлардан төзелгән күплекне элементларын санап күрсәтү юлы белән бирергә була. Мәсәлән, M күплеге a, b, c, d элементларыннан торса, M = $=\{a,b,c,d\}$ дип язалар.

Гадәттә, күплекне аның элементларының характеристик үзлеге аша бирәләр. Бу үзлек бирелгән күплекнең барлык элементлары өчен дә үтәлергә һәм башка элементлар бу үзлеккә ия булмаска тиеш. Мәсәлән, B күплеге $x^2 - -3x + 2 = 0$ тигезләмәсенең барлык тамырлары күплеге булса, A = $\{x|x^2 - -3x + 2 = 0\}$ дип языла. Гомуми очракта, әгәр B күплеге $P(y)$ үзлегенә ия булган у элементларыннан торса, $B =$ дип язалар.

Билгеләмә. *Әгәр ике күплек бер үк элементлардан гына торса, алар тигез күплекләр дип атала.*

Мәсәлән, әгәр $A = \{x|x^2 - 3x + 2 = 0\}$ һәм $C = 1; 2$ булса, $A = C$, чөнки

A һәм C күплекләре бер үк элементлардан тора (алар 1 һәм 2 саннары).

Билгеләмә. *Әгәр күплекнең элементлары чикле санда булса, бу күплек чикле күплек дип атала. Чикле булмаган күплек чиксез күплек дип атала.*

Мәсәлән, барлык натураль так саннар чиксез күплекне тәшкил итәләр, ә 5 санынннан кечерәк булган натураль саннар күплеге чикле күплек $\{1; 2; 3; 4\}$ була.

Кайбер вакытта бирелгән күплекне билгели торган характеристик үзлеккә ия булган элементлар булмаска да мөмкин. Мәсәлән, D күплеге $x^2 + +1 = 0$ тигезләмәсенең реаль тамырлары күплеге булса, бу күплекнең бер элементы да булмый. Мондый күплекне буш күплек дип атыйлар һәм 0 тамгасы белән билгелиләр. Шулай итеп, $D = \{x | x^2 + 1 = 0,\ x \in \boldsymbol{R}\} = \emptyset$.

Билгеләмә. *Әгәр A күплегенең барлык элементлары B күплегенең элементлары булып торса, A күплеге B күплегенең күплекчәсе* дип атала һәм $A \subset B$ дип языла.*

Билгеләмәдән күренгәнчә, һәрбер A күплеге үзенең күплекчәсе булып тора, ягъни $A \subset A$. Буш күплек $\emptyset$ теләсә нинди күплекнең күплекчәсе булып исәпләнә. Шулай итеп, А күплегенең һәрвакыт ике күплекчәсе бар: аларның берсе — A күплеге үзе, ә икенчесе — буш күплек $\emptyset$.

Барлык күплекләр дә ниндидер U күплегенең күплекчәләре дип санала. Бу U күплеген *универсаль күплек** дип атыйлар.

Югарыда әйтелгәннәрдән $A \subset B$ һәм $B \subset A$ булганда гына, $A = B$ икәне килеп чыга. Шулай итеп, A күплегенең B күплегенә тигезлеген исбатлау ике адымннан тора.

Беренче адым — $A \subset B$ икәнен исбатлау. Моның A күплегенең барлык элементлары да B күплеге элементлары булып торуын күрсәтергә кирәк.

Икенче адым — $B \subset A$ икәнен исбатлау. Моның өчен B күплегенең барлык элементлары да A күплегенеке булуын исбатларга кирәк.

---

* Икенче төрле атамалары да очрый; *кече куплек*, *асткуплек* (ред. иск.)

2. Саннар күплекләре

Математикада еш кына саннар күплеге белән эш итәргә туры килә. Иң еш очрый торган күплекләр $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ һәм $\boldsymbol{C}$ күплекләре. Бу күплекләр «Саннар системалары» курсында тирәнтен өйрәнелә. Хәзер без билгеле булган кайбер фактларны санап чыгу белән чикләнербез.

Натураль саннар күплеге

Натураль саннар күплеген $\boldsymbol{N} = 1; 2; 3; \ldots$ дип тамгалыйлар.

Аның иң әһәмиятле үзлекләрен билгеләп үтик:

1. Натураль саннарның суммасы һәм тапкырчыгышы натураль саннар була.

Бу үзлекне натураль саннар күплегенең кушу һәм тапкырлауга карата *йомыклык үзлеге* дип атыйлар.

2. Натураль саннар күплегендә иң кечкенә элемент бар. Ул — 1 саны.

3. Натураль саннар күплегендә алу гамәле һәрвакытта да үтәлми.

Бөтен саннар күплеге

Бөтен саннар күплеген $\boldsymbol{Z} = \{1; 2; 3; \ldots\}$ дип тамгалыйлар.

Аның иң әһәмиятле үзлекләре:

1. Бөтен саннар күплеге $\boldsymbol{Z}$ натураль саннар күплеген үз эченә ала, ягъни $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.

2. Бөтен саннар күплеге $\boldsymbol{Z}$ — өч арифметик гамәл: кушу, алу, тапкырлауга карата йомык күплек.

3. Бөтен саннар күплегендә бүлү һәрвакытта да үтәлми.

Билгеләмә. *Кушу, алу, тапкырлау арифметик гамәлләренә карата йомык булган саннар күплеген саннар боҗрасы дип атыйлар.*

Шулай итеп, бөтен саннар күплеге $\boldsymbol{Z}$ саннар боҗрасы була. Бөтен җөп саннар күплеге шулай ук саннар боҗрасы була.

Рациональ саннар күплеге

Рациональ саннар күплеген $\boldsymbol{Q} = \left\{a \middle| a = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}, p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{N}\right\}$ дип тамгалыйлар.

Аның үзлекләре:

1. Рациональ саннар күплеге $\boldsymbol{Q}$ бөтен саннар күплеген үз эченә ала, ягъни $\boldsymbol{Q} \subset \ \boldsymbol{Z}$.

2. Рациональ саннар күплеге — $\boldsymbol{Z}$ кушу, алу, тапкырлауга, ә $\boldsymbol{Z}\backslash\{0\}$ күплеге бүлү гамәленә карата йомык күплек.

3. Теләсә нинди рациональ санны чикле яки чиксез унарлы периодик вакланма рәвешендә күрсәтергә була.

4. Рациональ саннар күплегендә тамыр алу гамәлен һәрвакытта да башкарып булмый. Мәсәлән, $\sqrt{2}$ саны рациональ сан түгел.

Реаль саннар күплеге

Реаль саннар күплеге латин хәрефе $\boldsymbol{R}$ белән тамгалана.

Бу күплекне барлык унарлы (чикле, чиксез периодик, чиксез периодик булмаган) вакланмалар күплеге дип билгеләргә була.

Аның төп үзлекләре:

1. Реаль саннар күплеге $\boldsymbol{R}$ рациональ саннар күплеген үз эченә ала, ягъни $\boldsymbol{Z} \subset \ \boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}$ күплегендә ($\boldsymbol{Q}$ күплегенә кермәгән) периодик булмаган чиксез унарлы вакланмалар бар.

2. Реаль саннар күплеге $\boldsymbol{R}$ — кушу, алу, тапкырлауга карата йомык күплек.

3. Нульгә тигез булмаган реаль саннар күплеге $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ бүлүгә карата йомык күплек була.

Билгеләмә. *Биредә китерелгән 2 нче һәм 3 нче үзлекләргә ия булган саннар күплеге саннар кыры дип атала.*

Бу үзлекләр рациональ саннар күплеге өчен дә үтәлә. Шулай итеп, һәм К күплекләре саннар кыры була.

4. Тискәре реаль саннардан җөп күрсәткечле тамыр алу гамәле үтәлми. Башка очракларда реаль саннар күплегендә тамыр алу мөмкин.

5. Саннар турысы һәм реаль саннар күплеге арасында үзара беркыйммәтле тиңдәшлек бар. Ягъни саннар турысындагы һәрбер нокта нинди дә булса реаль санга тиңдәш һәм, киресенчә, һәрбер реаль сан саннар турысындагы бердәнбер ноктага тиңдәш була. Бу үзлек реаль саннар күплегенең өзлексезлеге дип атала.

Математикада реаль саннар күплегенең күплекчәләре дә еш очрый. Бу күплекчәләрнең аеруча әһәмиятлеләре булып $[a, b] = \{x|a \leq 1 \leq b\}$ — йомык интервал (кисемтә), $(a, b) = \{x|a < \mathrm{x} < b\}$ — ачык интервал (аралык), $[a, b) = = \{x|a \leq \mathrm{x} < b\}$ һәм $(a, b] = \{x|a \leq 1 < b\}$ ярымачык (ярымйомык) интерваллар тора.

Комплекс саннар күплеге

Комплекс саннар күплеген латин хәрефе $\boldsymbol{C}$ белән тамгалыйлар.

Бу күплек алгебра курсында тирәнтен өйрәнелә. Аның түбәндәге төп үзлекләре бар:

1. Комплекс саннар $\boldsymbol{C}$ күплеге $\boldsymbol{R}$ күплеген үз эченә ала, ягъни. $\boldsymbol{R} \subset \ \boldsymbol{C}$.

2. Комплекс саннар күплеге $\boldsymbol{C}$ — саннар кыры.

3. Комплекс саннар күплегендә теләсә нинди дәрәҗәдәге тамыр алып була.

4. Комплекс саннар $\boldsymbol{C}$ күплеге белән яссылыктагы нокталар арасында үзара беркыйммәтле тиңдәшлек бар.

Шулай итеп, без әһәмиятле төп саннар күплекләрен аларның үсә бару тәртибендә санап чыктык, ягъни $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$ икәнен күрдек, һәрбер киңәйтү бу саннар белән нинди дә булса яңа гамәл башкару мөмкинлеген бирә.

Мисаллар

1. Бирелгән күплекләрнең кайсылары чикле, кайсылары чиксез, кайсылары буш күплек?

1.1. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x}^2 - \mathrm{x} + 4 = 0, \mathrm{x} \in R\}$;

1.2. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x}^2 < 1, \mathrm{x} \in R\}$;

1.3. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 4 = 0, \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$;

1.4. $\{\mathrm{x} \mid 12 : \mathrm{x}, \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$;

1.5. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x}^2 - 4 = 0, \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$;

1.6. $\{\mathrm{x} \mid 4\mathrm{x}^2 - 1 = 0, \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$;

1.7. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} < 7, \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$;

1.8. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \geq 5, \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$;

1.9. $\{\mathrm{x} \mid \mathrm{x}^2 = 2, \mathrm{x} \in \mathrm{N}\}$;

1.10. $\{\mathrm{x} \mid 2 \leq \mathrm{x} \leq 5, \mathrm{x} \in \mathrm{Z}\}$.

2. Бирелгән күплекләрнең барлык күплекчәләрен табыгыз.

2.1. $\{1\}$;

2.4. $\{\{1, 2\}, \{3\}, 1\}$;

2.2. $\{1, 2\}$; **2.5.** $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, 6, 7\}$;

2.3. $\{1, 2, 3\}$; **2.6.** $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$.

3. Түбәндәге күплекләрнең геометрик сурәтен табыгыз (7-20 мисалларда $x, y \in \boldsymbol{R}$):

3.1. $\{x \mid -2 \leq x \leq 5, x \in R\}$; **3.2.** $\{x \mid x < 4, x \in N\}$;

3.3. $\{x \mid 5 < x < 10, x \in Z\}$; **3.4.** $\{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0, x \in N\}$;

3.5. $\{x \mid x^2 - 4 = 0, x \in N\}$; **3.6.** $\{x \mid x^2 \geq 2, x \in R\}$;

3.7. $\{(x, y) \mid y = 2x\}$; **3.8.** $\{(x, y) \mid y > x\}$;

3.9. $\{(x, y) \mid y = 2x\}$; **3.10.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

3.11. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$; **3.12.** $\{(x, y) \mid (x - 2)^2 + y^2 \leq 9\}$;

3.13. $\{(x, y) \mid x^2 + (y + 2)^2 \geq 4\}$; **3.14.** $\{(x, y) \mid y \leq 2x + 5\}$;

3.15. $\{(x, y) \mid x < -y^2\}$; **3.16.** $\{(x, y) \mid x^2 \leq y\}$;

3.17. $\{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 3\}$; **3.18.** $\{(x, y) \mid x \geq -3, y \leq -1\}$;

3.19. $\{(x, y) \mid x + 2 \leq y\}$; **3.20.** $\{(x, y) \mid x + y < 3\}$.

§ 1.2. Күплекләрнең кисешмәсе һәм берләшмәсе

Бирелгән күплекләр белән ниндидер гамәлләр башкарып, яңа күплекләр төзергә була.

Билгеләмә. *А һәм В күплекләренең икесенә дә кергән элементлардан төзелгән күплек А һәм В күплекләренең кисешмәсе дип атала һәм* $A \cap B$ *дип тамгалана.*

Димәк, $A \cap B = \{x | x \in A$ һәм $x \in B\}$.

Әгәр $A \cap B = \emptyset$ булса, А һәм В күплекләре кисешми дип әйтәләр.

Мисаллар

1. Әгәр $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ булса, $A \cap B = \{2, 4\}$.

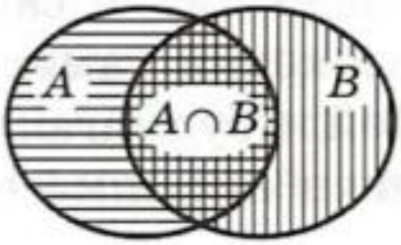
2. Әгәр $A = (3, 5]$, $B = [-1,4]$ булса, $A \cap B = (3, 4]$.

3. C — җөп бөтен саннар күплеге, B күплеге 3 кә бүленүче бөтен саннар күплеге булса, $C \cap D$ кисешмәсе бер үк вакытта 3 кә дә, 2 гә дә бүленүче, ягъни

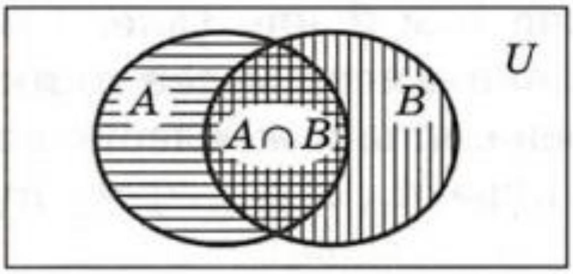
6 га бүленүче саннар күплеге була.

Күз алдына китерү җиңелрәк булсын өчен, кайбер вакытта күплекләрне Эйлер–Венн диаграммасы ярдәмендә күрсәтәләр. Бу очракта бирелгән күплек йомык фигура эченә урнашкан яссылык нокталары итеп алына. Мисал өчен, 1.1 нче рәсемдә A күплеге горизонталь сызыклар белән, ә B күплеге вертикаль сызыклар белән штрихланган. Вертикаль һәм горизонталь сызыклар белән штрихланган өлеш $A \cap B$ кисешмәсе була.

Әгәр универсаль U күплеге дә каралса, ясалган фигураларны ниндидер башка фигура белән камап алалар. Гадәттә, бу фигура турыпочмаклык рәвешендә алына. 1.2 нче рәсемне кара.



Рәс. 1.1



Рәс. 1.2

Күплекләрнең кисешмәсен табу гамәле түбәндәге үзлекләргә ия:

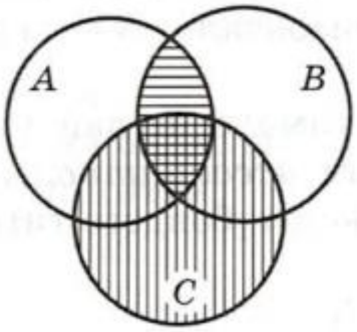
1. $A \cap B = B \cap A.$

Бу тигезлек кисешмәнең *коммутативлык* үзлеге дип атала. Аның исбатланышы билгеләмәдән килеп чыга. Дөрестән дә, $A \cap B$ күплегендәге теләсә нинди элемент $B \cap A$ күплегенә дә керә һәм, киресенчә, $B \cap A$ күплегендәге теләсә нинди элемент $A \cap B$ күплегенең дә элементлары булып тора.

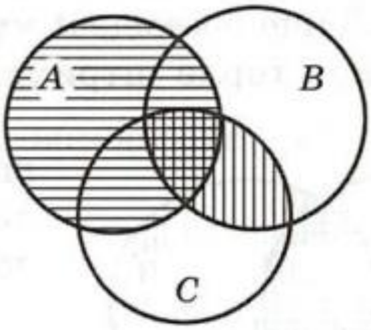
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

Бу нәтиҗә — кисешмәнең *ассоциативлык* үзлеге.

Аны исбатлап күрсәтик, $x \in (A \cap B) \cap C$ булсын. Бу, $x \in (A \cap B)$ һәм $x \in C$ икәнлеген аңлата. Ләкин $x \in (A \cap B)$ булудан $x \in A$ һәм $x \in B$ икәнлеге килеп чыга. Димәк, $x \in B$ һәм $x \in C$, моннан $x \in B \cap C$ икәнен күрәбез. Хәзер $x \in A$ һәм $x \in B \cap C$ икәнен исәпкә алсак, $x \in (A \cap B) \cap C$ нәтиҗәсенә киләбез. Шулай итеп, $(A \cap B) \cap C$ күплегендәге ирекле x элементы $A \cap (B \cap C)$ күплегенең дә элементы булып тора, ягъни $(A \cap B) \cap C =$ $=A \cap (B \cap C)$. Моңа кире әйтем $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ нәкъ югарыдагыча күрсәтелә. Моннан исбатланасы үзлекнең дөреслеге килеп чыга. Кисешмәнең ассоциативлык үзлеген Эйлер–Венн диаграммасында күрсәтик.



Рәс. 1.3. $A \cap B$ *горизонталь штрихланган,*
C вертикаль штрихланган,
$(A \cap B) \cap C$ *ике тапкыр штрихланган.*



Рәс. 1.4. A горизонталь штрихланган,
$B \cap C$ *вертикаль штрихланган,*
$A \cap (B \cap C)$ *ике тапкыр штрихланган.*

1 нче һәм 2 нче үзлекләргә нигезләнеп чикле сандагы күплекләрнең кисешмәсен тапканда, нәтиҗәнең гамәлләр эшләү тәртибенә, ягъни җәяләрне кая куюга бәйле булмаганлыгы чыга. Шуңа күрә $A_1, A_2, \dots, A_n$ күплекләренең кисешмәсен кыскача $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ рәвешендә язалар.

Кисешмә билгеләмәсеннән килеп чыккан башка үзлекләрне дә күрсәтеп китик:

3. $A \cup A = A$.

4. $A \cup U = U$.

5. $A \cup \emptyset = A$

Билгеләмә. *A күплегенә яки B күплегенә (яки икесенә дә) кергән элементлардан төзелгән күплек A һәм B күплекләренең берләшмәсе дип атала.*

Биредә «яки» теркәгече бүленми торган мәгънәдә кулланыла, ягъни берләшмәнең һәрбер x элементы A, B күплекләренең берсенә булса да керергә тиеш (яки A га, яки B га, яки бу күплекләрнең икесенә дә). Бу билгеләмәне кыскача болай язабыз:

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ яки } x \in B\}$.

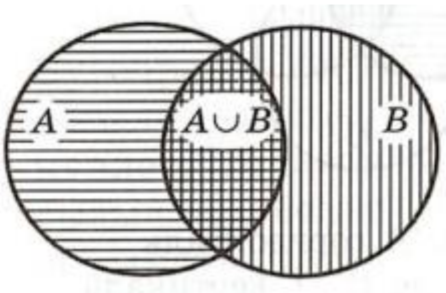
Мисаллар

1. A={1; 2; 3; 4; 5}, B = {2; 4; 6; 8} булса, $A \cup B$= {1; 2; 3; 4; 5; 6; 8} була.

2. A= (3; 5], B = [-1;4] булса, $A \cup B$ = [-1; 5] була.

3. Әгәр C — бөтен җөп саннар күплеге, B бөтен так саннар күплеге булса, $C \cup D$ барлык бөтен саннар күплеге була.

Берләшмә гамәлен Эйлер–Венн диаграммасы ярдәмендә күрсәтик. 1.5- нче рәсемдә A күплеге — горизонталь, B — вертикаль, ә A и B ике төрле штрихланган өлкә.



Рәс. 1.5

Берләшмә гамәле шулай ук *коммутативлык* һәм *ассоциативлык* үзлекләренә ия, ягъни түбәндәге тигезлекләр дөрес була:

1. $A \cup B = B \cup A$

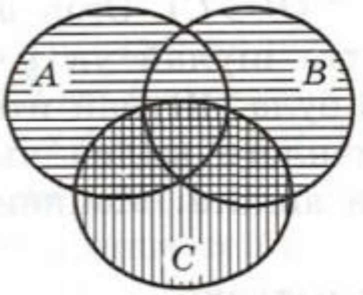
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Беренче тигезлекнең дөреслеге турыдан-туры билгеләмәдән чыга.

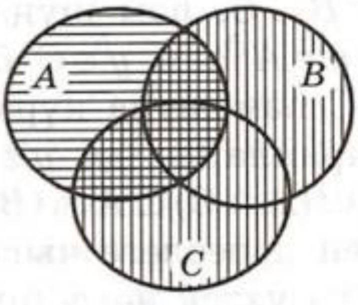
Икенче тигезлекне исбатлау өчен, $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ һәм $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ икәнен күрсәтергә кирәк. Бу шартларның икенчесенең дөреслеген күрсәтик.

$x \in A \cup (B \cup C)$ булсын. Бу $x \in A$ яки $x \in B \cup C$ икәнен аңлата. Әгәр $x \in A$ булса, $x \in A \cup B$ була, шуңа күрә $x \in (A \cup B) \cup C$, ягъни $A \cup (B \cup C) \subset\subset (A \cup B) \cup C$. Хәзер $x \in B \cup C$ очрагын тикшерик. Ул вакытта $x \in B$ яки $x \in C$. Әгәр $x \in B$ булса, $x \in A \cup B$, димәк, $x \in (A \cup B) \cup C$ була. Әгәр $x \in C$ булса, $x \in (A \cup B) \cup C$. Шулай итеп, $(A \cup B) \cup C$ күплегендәге һәрбер x элементы $(A \cup B) \cup C$ күплегенең дә элементы булып тора. Бу $A \cup (B \cup C) \subset\subset (A \cup B) \cup C$ икәнен аңлата. Моңа кире раслау нәкъ шушы рәвештә исбатланыла. Шулай итеп, икенче үзлек исбатланды.

Берләшмәнең ассоциативлык үзлеген Эйлер–Венн диаграммасында тасвирлыйк (1.6 нчы һәм 1.7 нче рәсемнәр).



Рәс. 1.6. $A \cup B$ *— горизонталь итеп штрихланган,*
C *— вертикаль итеп штрихланган,*
$(A \cup B) \cup C$ *— барлык штрихланган өлкә.*



Рәс. 1.7. A *— горизонталь итеп штрихланган,*
$B \cup C$ *— вертикаль итеп штрихланган,*
$A \cup (B \cup C)$ *— барлык штрихланган өлкә.*

1 нче һәм 2 нче үзлекләрдән күренгәнчә, чикле сандагы күплекләрнең берләшмәсен тапканда, нәтиҗә гамәлләрнең үтәлү тәртибенә, ягъни җәяләрне кая куюга бәйле түгел. Шуңа күрә $A_1, A_2, \dots, A_n$ күплекләренең берләшмәсен кыскача $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ рәвешендә язалар.

Берләшмә билгеләмәсеннән килеп чыккан башка үзлекләрне дә күрсәтеп китик:

3. $A \cup A = A$.

4. $A \cup U = U$.

5. $A \cup \emptyset = A$

Берләшмә һәм кисешмә гамәлләрен берләштерүче үзлекләр дә бар. Алар *дистрибутивлык законнары* дип атала һәм болай языла:

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

6'. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6 нчы үзлекне исбатлыйк. Аның өчен башта $A \cap (B \cup C) \subset$ $\subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ икәнен күрсәтик, $x \in A \cap (B \cup C)$ булсын. Кисешмә билгеләмәсе буенча, $x \in A$ һәм $x \in B \cup C$ була. Моннан ($x \in A$ һәм $x \in B$) яки ($x \in A$ һәм $x \in C$) очраклары булуы мөмкин. Беренче очракта $x \in A \cap B$, ә икенче очракта $x \in A \cap C$. Ике очракта да $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ була. Димәк, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Хәзер $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ икәнлеген, ягъни алда исбатлаганның киресен исбатлыйк, $y \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ булсын. Моннан берләшмә билгеләмәсе буенча, $y \in A \cap B$ яки $y \in A \cap C$ була. Әгәр $y \in A \cap B$ булса, $y \in A$ һәм $y \in B$ була. Ул вакытта $y \in A$ һәм $y \in B \cup C$, һәм шуңа күрә дә $y \in A \cap (B \cup C)$. Әгәр $y \in A \cap C$ булса, $y \in A$ һәм $y \in C$ була. Ул вакытта шулай ук $y \in A$ һәм $y \in B \cup C$ һәм шуңа күрә $y \in A \cap (B \cup C)$ була. Шулай итеп, барлык очракларда да $y \in A \cap (B \cup C)$ икәнлеге килеп чыга. Бу $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ икәнлеген аңлата. Моннан 6 нчы үзлекнең дөреслеге чыга.

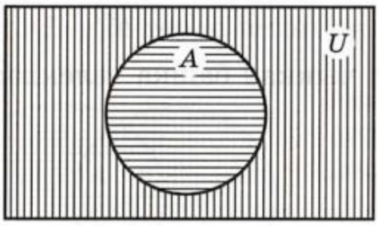
6' нчы үзлек нәкъ шушы рәвештә исбатлана.

6 һәм 6' үзлекләрен Эйлер–Венн диаграммасында мөстәкыйль рәвештә күрсәтергә тәкъдим итәбез.

§ 1.3. Күплек өстәмәсе. Күплекләр аермасы

Билгеләмә. *A күплегенә кермәүче барлык элементлар күплеген A күплегенең өстәмәсе дип атыйлар һәм $\bar{A}$ дип тамгалыйлар.*

Шулай итеп, $\bar{A} = \{x | x \notin A\}$. Бу билгеләмә буенча, A күплеге ниндидер универсаль U күплегенең бер өлеше, ягъни аның күплекчәсе дип исәпләнә. A күплегенең өстәмәсе Эйлер–Венн диаграммасында 1.8 нче рәсемдә күрсәтелгән



Рәс. 1.8. A — горизонталь итеп штрихланган,
$\bar{A}$— вертикаль итеп штрихланган.

Мисаллар

1) Универсаль күплек U=$\mathbf{N}$, *ә* A так натураль саннар күплеге булсын. Ул вакытта $\bar{A}$ җөп натураль саннар күплеге була.

2) Әгәр универсаль күплек $U = [0;\infty)$, $A = [3;6]$ булса, $A = [0; 3) \cup (6; \infty)$ була.

Билгеләмәдән күренгәнчә, күплек өстәмәсенең өстәмәсе баштагы күплек белән тәңгәл килә: $\bar{\bar{A}} = A$.

Ике күплек берләшмәсенең һәм кисешмәсенең өстәмәсен бу күплекләрнең үзләренең өстәмәләре аша күрсәтеп була:

7. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$

7'. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$

Бу тигезлекләр *де Морган законнары* дип атала (Августус де Морган (1806—1871) — шотланд математигы һәм логигы).

7 нче тигезлекне исбатлап күрсәтик, $x \in \overline{A \cap B}$ булсын. Күплек өстәмәсе билгеләмәсе буенча, бу $x \notin A \cap B$ икәнен аңлата. Димәк, $x \notin A$ яки $x \notin B.$ Моннан $x \in A$ яки $x \in B,$ ягъни $x \in \bar{A} \cup \bar{B}.$ Шулай итеп, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}.$ Хәзер $y \in \bar{A} \cup \bar{B}$ булсын. Ике күплекнең берләшмәсе билгеләмәсе буенча, моннан $y \in \bar{A}$ яки $y \in$

$\bar{B}$ икәнен күрәбез, ягъни $y \notin A$ яки $y \notin B$. Бу вакытта күплекнең кисешмәсе билгеләмәсе буенча $y \notin A \cap B$, ягъни $y \in \overline{A \cap B}$. Шулай итеп, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$. Димәк, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. $7'$ тигезлеге нәкъ шушы рәвештә исбатланыла.

Де Морган законнарын Эйлер–Венн диаграммасында мөстәкыйль рәвештә сурәтләп карарга тәкъдим ителә.

Күплек өстәмәсенең кисешмә һәм берләшмә гамәлләре белән бәйле булган түбәндәге үзлекләре билгеле:

8. $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

8'. $A \cap \bar{A} = U$.

Билгеләмә. *A күплегенең B күплегенә кермәүче элементларыннан төзелгән күплек A һәм B күплекләренең аермасы дип атала.*

а) $A \backslash B$ — *штрихланган өлкә* б) $B \backslash A$ — *штрихланган өлкә*

Рәс. 1.9

Бу күплек A\B дип тамгалана. Шулай итеп, $A \backslash B = \{x|\ x \in A$ һәм $x \notin B\}$ (рәс. 1.9, а), $B \backslash A = \{x|\ x \in B$ һәм $x \notin A\}$ (рәс. 1.9, *б)*.

Мисаллар

1) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{3; 5\}$ булсын. Ул вакытта $A \backslash B = \{1; 2; 4; 6\}$, $B \backslash A = \emptyset$.

2) Әгәр $A = [-1; 4]$, $B = [2; 6]$ булса, $A \backslash B = [-1; 2)$, $B \backslash A = (4; 6]$.

Өстәмә һәм кисешмә билгеләмәләреннән $A \backslash B = \{x|\ x \in A$ һәм $x \notin B\} = = \{x|\ x \in A$ һәм $x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}$ икәнлеге килеп чыга. Шулай итеп, $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ була. Димәк, ике күплекнең аермасын һәрвакыт кисешмә һәм күплек өстәмәсе аша күрсәтеп була.

Ике күплекнең аермасы өчен түбәндәге үзлекләр үтәлә:

1. $(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$;

2. $A\backslash B = A\backslash(A \cap B)$.

Бу тигезлекләрнең беренчесенең дөреслеге кисешмә һәм берләшмә үзлекләреннән килеп чыга. Дөрестән дә, $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \bar{B}$ икәнлеген исәпкә алсак, дистрибутивлык законы нигезендә, $(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup \mathrm{B} = \left(A \cap \overline{\mathrm{B}}\right) \cup B = (A \cup \mathrm{B}) \cap \cap$ $(B \cup \overline{\mathrm{B}})$ була. Моннан, $B \cup \overline{\mathrm{B}} = \mathrm{U}$ һәм $A \cap U = A$ булганыктан, $(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup \mathrm{B} = = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ икәнлеген күрәбез.

Икенче тигезлек тә шушы рәвештә исбатлана. Бу тигезлекнең уң ягын үзгәртә башлыйк. Моннан $\mathrm{A}\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{A} \cap (\overline{A \cap B}) = \mathrm{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) == (A \cap \bar{A}) \cup \left(A \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = \emptyset \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$.

Без биредә аерманы кисешмә аша күрсәттек, аннан соң де Морган, дистрибутивлык, кисешмә һәм берләшмә законнарын кулландык.

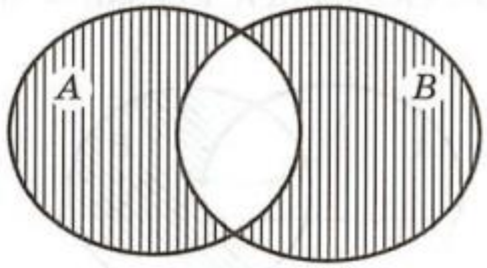
Китерелгән үзлекләрне исбатлаганда кулланылган ысулны кайбер вакытта *эквивалент рәвешүзгәртүләр* ысулы дип атыйлар.

Исбатланган беренче үзлектән түбәндәге нәтиҗә килеп чыга. Әгәр башта $A\backslash B$ аермасын табып (ягъни А күплегеннән B күплеген алсак), ә аннан соң $(\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup \mathrm{B}$ берләшмәсен тапсак, (ягъни барлыкка килгән аерма белән B күплеге берләшмәсе төзесәк), ул вакытта $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ күплеге барлыкка киләчәк.

$A\backslash B$ аермасы билгеләмәсенә А һәм А күплекләре симметрик булып кермиләр, димәк, $A\backslash B \neq B\backslash A$, әмма *симметрик аерма* тешечәсендә бу «җитешсезлек» юк.

Билгеләмә. $(A\backslash B) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$ *күплеге* А *һәм* А *күплекләренең симметрик аермасы дип атала.*

Бу күплекне $\bar{A}\,\Delta B$ дип тамгалыйлар. Шулай итеп, $\bar{A}\,\Delta B = (A\backslash B) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A})$. Симметрик аерма Эйлер–Венн диаграммасында түбәндәгечә 1.10 рәсемендәгечә сурәтләнә.



Рәс. 1.10. **A Δ B** *күплеге штрихланган өлкә.*

Эйлер–Венн диаграммасы $\overline{A}\,\Delta B$ = $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \backslash (A \cap \mathrm{B})$ тигезлеге үтәлергә тиешлеген күрсәтә. Дөрестән дә, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A\backslash B) \cup (B \cap \overline{A}\,) = = \big((A\backslash B \cup \mathrm{B}) \cap (A\backslash B \cup \overline{A}\,)\big) = (A \cup \mathrm{B}) \cap ((A\ \cap \overline{B}\,) \cup \overline{A}\ ) =(A\ \cup B)\ \cap ((A \cup \overline{A}\,)\ \cap$ $\cap\, (\overline{B}\ \cup \overline{A}\,)) = (A \cup B) \cap (U \cap \overline{B \cap A}) = (A\ \cup B) \cap \overline{B \cap A} = (\mathrm{A}\ \cup\ B) \setminus (\ B\ \cup\ A) = =(A \cup B)(A \cap B).$

Без бирегә ике тапкыр дистрибутивлык законын, аннан соң берләшмә, кисешмә, аерма һәм де Морган законнарын кулландык. Исбатланылган тигезлекне симметрик аерманың икенче билгеләмәсе дип йөртәләр. Симметрик аерма өчен түбәндәге тигезлекләр үтәлә:

1. $A\Delta B = B\Delta A;$

2. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C.$

Симметрик аерманың билгеләмәсе һәм берләшмәнең коммутативлык үзлеге нигезендә бу тигезлекләрнең беренчесен исбатлап күрсәтик:

$A\Delta\, B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (B\backslash A) \cup (A\backslash B) = B\ \Delta\ A$

Икенче тигезлекне мөстәкыйль рәвештә исбатлагыз.

§ 1.4. Күплекләр белән башкарылган гамәлләрнең үзлекләрен барлау

Күплекләр белән башкарылган барлык гамәлләрнең үзлекләрен бергә җыйсак, түбәндәге тигезлекләрнең дөрес икәнлеген күрәбез.

1. $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$	1'. $A \cap \emptyset\ = \emptyset$
2. $A \cup \emptyset\ = A$	2'. $A\ \cap \mathrm{U}\ =\ A$
3. $A \cup A = A$	3'. $A\ \cap\ A = A$
4. $A \cup \overline{A}\ = \mathrm{U}$	4'. $A\ \cap\ \overline{A}\ \ = \emptyset$

5. $A \cup B = B \cup A$	5'. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = B \cap A$
6. $A \cup (B \cup \mathrm{C}) = (A \cup B) \cup \mathrm{C}$	6'. $A \cap (B \cap \mathrm{C}) = (A \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}$
7. $A \cup (B \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \mathrm{C})$	7'. $A \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (A \cap \mathrm{B}) \cup (A \cap \mathrm{C})$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	8'. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
9. $\overline{\overline{A}} = A$	

Китерелгән 17 үзлек кисешмә, ерләшмә һәм өстәмә табу гамәлләренә бәйле. Бу тигезлекләрне исбатлаганда, без аларның билгеләмәләрен генә кулландык. Аерма һәм симметрик аерма табу гамәлләре мөстәкыйль түгел, чөнки алар кисешмә, берләшмә һәм өстәмә табу гамәлләре аша күрсәтеләләр.

Дөрестән дә, $A\setminus B = \mathrm{A} \cap \overline{B}$, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \mathrm{B})$**.** Шуңа күрә аерма һәм симметрик аерма гамәлләре кергән тигезлекләрне алда китерелгән 17 үзлеккә нигезләнеп исбатларга була. Әйтелгәннәрне мисалда аңлатып үтик.

Аерма гамәле өчен түбәндәге тигезлекләрнең дөреслеге билгеле:

1. $A\setminus (B \cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$,

2. $A\setminus (B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$.

Бу тигезлекләр аерма гамәле өчен **де Морган законнары** дип аталалар.

Шуларның беренчесен исбатлап күрсәтик.

$\mathrm{A}\setminus (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cap (\overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}}) = \mathrm{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (\mathrm{A} \cap \overline{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{C}) = =(\mathrm{A}\setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\setminus \mathrm{C})$.

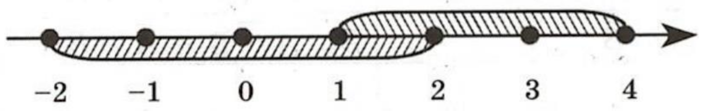
Биредә без аерма билгеләмәсеннән тыш, де Морган һәм дистрибутивлык законнарын кулландык. Нәкъ шулай итеп, 2 нче тигезлек исбатланыла.

1—8 һәм 1'—8' тигезлекләренең бер үзлегенә игътибар итик. Әгәр бу тигезлекләрдә ∩ һәм ∪, шулай ук U һәм ∅ тамгаларын бер-берсенә алыштырсак, *k* һәм *k' (k* = 1; 2; ... ; 8) номерлы тигезлекләр бер-берсенә күчә. Бу нәтиҗә үзлекләр ярдәмендә исбатланылган берләшмә, кисешмә, өстәмә тамгаларын үз эченә алган теләсә нинди тигезлекнең ∩ тамгасын ∪ тамгасына, шулай ук U тамгасын ∅ тамгасына алыштырганда дөрес тигезлеккә күчүен аңлата.

Күнегүләр

1. Әгәр $A = [1;4]$, $B = [-2;2]$ булса, $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $A\cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$ күплекләрен табыгыз һәм аларны геометрик рәвештә сурәтләгез.

Чишү. Иң башта A һәм B күплекләрен геометрик рәвештә сурәтлибез:



Ул вакытта күплекләр белән башкарылган гамәлләр билгеләмәсеннән:

$A \cup B = [-2;4]$, $A \cap B = [1;2]$, $A\backslash B = (2;4]$, $B\backslash A = [-2;1)$, $\overline{A} = (-\infty;1) \cup \underline{(4;}\ +\infty)$, $\overline{B} = (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$, $A \cup \overline{B} = (-\infty;-2) \cup [1;+\infty)$, $\overline{A\ \cap\ B} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$ икәнен табабыз.

2. Әгәр $A = \{\,(x,y)\mid (x-1)^2 + y^2 \le 4\boldsymbol{)},$ $B = \{\,(x,y)\mid x^2 \le 1-y\}$ булса, $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $\overline{A}$ күплекләрен геометрик рәвештә сурәтләгез.

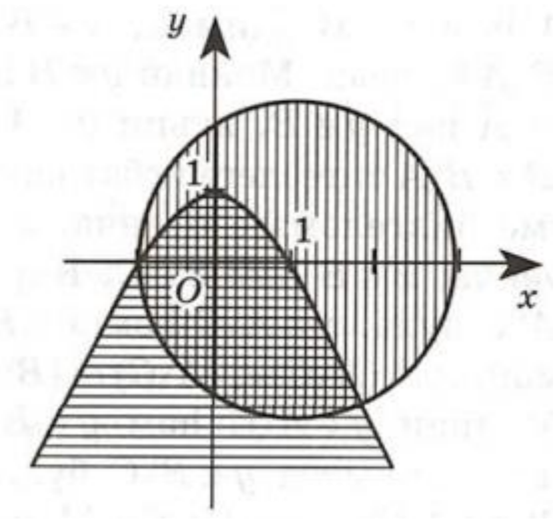
Чишү. $\boldsymbol{xOy}$ яссылыгында $(x-1)^2 + y^2 = 4$ тигезләмәсе радиусы 2, үзәге (1;0) ноктасында булган әйләнә нокталарыннан гыйбарәт. Шуңа күрә A күплеге шушы әйләнә чикләгән түгәрәк нокталары була.

$y = 1 - x^2$ тигезләмәсе түбәсе (0; 1) ноктасында, ә япьләре аска юнәлгән параболадан гыйбарәт. Шарт буенча,

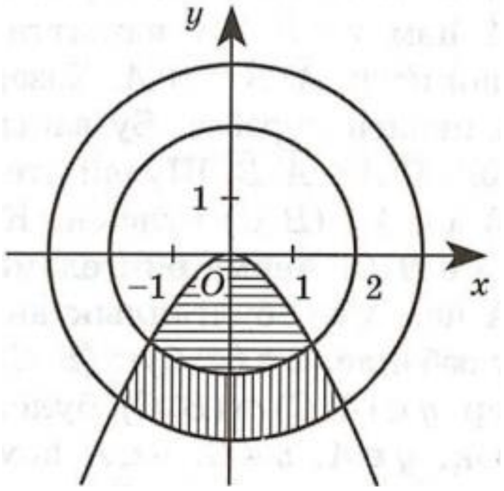
$y \le 1 - x^2$**,** ул вакытта B күплеге парабола белән чикләнгән күплекнең эчке нокталары була. Бу күплекләрне сызымда сурәтлик (рәс. 1.11).

A күплеге — вертикаль итеп, B күплеге — горизонталь итеп штрихланган күплекләр. Ул вакытта $A \cup B$ — иң кимендә бер тапкыр штрихланган күплек, $A \cap B$ — ике тапкыр штрихланган күплек, $A\backslash B$ — түгәрәкнең бары тик вертикаль штрихланган бер өлеше, $B\backslash A$ — парабола белән чикләнгән күплекнең бары тик горизонталь штрихланган эчке нокталары. $\overline{A}$ — яссылыкның түгәрәк нокталары кермәгән өлеше.

3. Әгәр $A = \{\,(x,y)\mid x^2 + y^2 \ge 4\}$, $B = \{\,(x,y)\mid x^2 + y^2 \le 9\}$, $C = \{\,(x,y)\mid x^2 \le -y\}$ булса, $A \cup (B\backslash C)$, $A\backslash(B \cap C)$ күплекләрен геометрик рәвештә сурәтләгез.



Рәс. 1.11



Рәс. 1.12

Чишү. (1.12 нче рәсемне кара). A күплеге — үзәге координаталар башлангычында, радиусы 2 булган түгәрәкнең тышкы өлеше. B күплеге — радиусы 3 булган түгәрәк нокталары (үзәге координаталар башлангычында), C күплеге — $y=-x^2$ параболасы чикләгән күплекнең эчке нокталары. Шуңа күрә $B\backslash C$ күплеге — В түгәрәгенең C күплеге нокталары кермәгән өлеше, $A\cup(B\backslash C)$ күплегенә яссылыкның горизонталь штрихланган өлеше генә керми.

Хәзер $A\backslash(B\cap C)$ күплеген табыйк. $B\cap C$ күплеге — радиусы 3 булган түгәрәкнең һәм $y=-x^2$ параболасы чикләгән күплекнең эчке нокталарның уртак өлеше. $A\backslash(B\cap C)$ күплегенә кечкенә түгәрәкнең тышкы нокталарының вертикаль штрихланган өлеше генә керми.

4. Күплекләрнең тигезлеген исбатлагыз:

а) $A\backslash B=(A\cup B)\backslash C$;

б) $\bar{A}\backslash\bar{B}=B\backslash A$;

в) $A\cap(B\backslash C)=(A\backslash B)\cap(B\backslash C)$.

Чишү. X һәм Y күплекләренең тигезлеген исбатлау өчен, X күплегенең теләсә кайсы элементы Y күплегенең элементы һәм, киресенчә, Y күплегенең һәр элементы X күплегенең элементы икәнен күрсәтергә кирәк. Димәк, без $X\subset Y$ һәм $Y\subset X$ булганын күрсәтергә тиеш булабыз.

а) $x\in A\backslash B$ булсын. Бу $x\in A$ һәм $x\notin B$ икәнен аңлата. Моннан $x\in A\cup B$ һәм $x\notin B$, ягъни $x\in(A\cup B)\backslash B$. Шуңа күрә $A\backslash B\subset(A\cup B)\backslash B$. Хәзер $y\in(A\cup B)\backslash B$ булсын. Димәк, $y\in A\cup B$ һәм $y\notin B$. Моннан $y\in A$ һәм $y\notin B$, ягъни $y\in A\backslash B$. Шуңа күрә $(A\cup B)\backslash B\subset A\backslash B$. Шулай итеп, $A\backslash B=(A\cup B)\backslash B$ икәне исбатланды.

б) $x\in\bar{A}\backslash\bar{B}$ булсын. Күплекләр аермасы билгеләмәсе буенча, $x\in\bar{A}$ һәм $x\notin\bar{B}$. Бу вакытта $x\notin A$ һәм $x\in B$. Димәк, $x\in B\backslash A$. Шулай итеп, $\bar{A}\backslash\bar{B}\subset B\backslash A$. Хәзер $y\in B\backslash A$ булсын. Моннан $y\in B$ һәм $y\notin A$ икәнен күрәбез. Бу вакытта $y\in\bar{A}$ һәм $y\notin\bar{B}$, ягъни $y\in\bar{A}\backslash\bar{B}$. Димәк, $B\backslash A\subset\bar{A}\backslash\bar{B}$. Шулай итеп, $\bar{A}\backslash\bar{B}=B\backslash A$ тигезлеге исбатланды.

в) $x\in A\cap(B\backslash C)$ булсын. Кисешмә билгеләмәсе буенча, $x\in A$ һәм $x\in B\backslash C$. Аерма билгеләмәсе буенча, $x\in B$ һәм $x\notin C$. Биредә $x\in A$ һәм $x\notin C$ булганлыктан, $x\in A\backslash C$ була. $x\in A\backslash C$ һәм $x\in B\backslash C$ булу сәбәпле, $x\in(A\backslash C)\cap\cap(B\backslash C)$. Димәк, $A\cap(B\backslash C)\subset(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$. Хәзер $y\in(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$ булсын. Моннан $y\in A\backslash C$ һәм $y\in B\backslash C$. Димәк, $y\in A$, $y\notin C$. $y\in A$ һәм шул ук вакытта $y\in B\backslash C$ булганлыктан, $y\in A\cap(B\backslash C)$. Димәк, $(A\backslash C)\cap(B\backslash C)\subset A\cap(B\backslash C)$. Моннан $A\cap(B\backslash C)=(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$ икәне чыга.

§ 1.5. Күплекләрнең туры тапкырчыгышы

Чикле күплек бирелгәндә, аның элементларын теләсә нинди тәртиптә язарга була. Мәсәлән, A = {1; 3; 6} булса, аны A = {6; 3; 1} һәм A = {3; 1; 6} рәвешендә күрсәтә алабыз.

Ләкин кайбер очракларда элементлар гына түгел, ә аларның урнашу тәртипләре дә мөһим. Моңа мисаллар мәктәп практикасында да очрый. Мәсәлән, яссылык ноктасын аның ике координатасы ярдәмендә, ә пространство ноктасын аның өч координатасы ярдәмендә күрсәтергә була. Бу мисалларда нокталар координаталарының нинди саннар икәнлеге генә түгел, ә аларның урнашу тәртибе дә роль уйнаганы ачык күренә. Мәсәлән, (2; 1) һәм (1; 2) координаталары белән бирелгән нокталар яссылыкның төрле нокталары.

Билгеләмә. *Элементлары билгеле бер тәртиптә урнашкан ике элементлы күплек тәртипләштерелгән пар дип атала***.**

Беренче урында урнашкан элементны — парның беренче элементы (координатасы), ә икенче урында урнашкан элементны икенче элементы (координатасы) дип атыйлар. Тәртипләштерелгән парлар түгәрәк җәяләр ярдәмендә бирелә. Беренче элементы а, икенче элементы b булган тәртипләштерелгән пар (a, b) рәвешендә языла.

Билгеләмә. *(a, b) һәм (с, d) парлары a = с, b = d булган очракта бер-берсенә тигез парлар дип атала.*

Бу вакытта (a, b) = (с, d) дип языла.

Шушы рәвештә тәртипләштерелгән саннар өчлеге $(a,b,$с), тәртипләштерелгән саннар дүртлеге $(a, b,$ с, $d)$ һәм башка тәртипләштерелгән күплекләр бирергә була.

Билгеләмә. *Беренче элементы* А *күплегенә, ә икенчесе B күплегенә кергән барлык тәртипләштерелгән парлардан төзелгән күплек* А *һәм B күплекләренең туры (декартча) тапкырчыгышы дип атала һәм* А× *B дип тамгалана.*

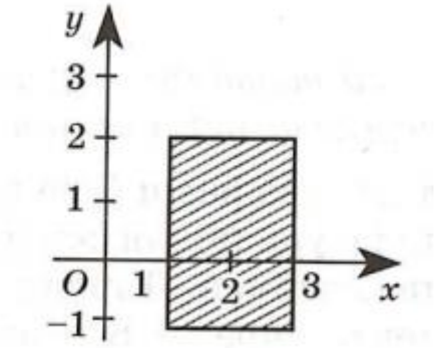
Димәк, $A\times$ В = $\{(a, b)|\ a \in A$ һәм $b \in B\}$. Әгәр $A = B$ булса, $A \times B$ туры тапкырчыгышы A^2 рәвешендә языла. Шулай итеп, $\boldsymbol{R}$ күплеге саннар турысын биргәнгә күрә, $\boldsymbol{R^2}$ күплеге яссылыктагы барлык нокталар күплеге була.

Мисал 1. A = {1; 2; 4}, B = {a, b} булса, $A\times B$={(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (4,a), (4, b)} була.

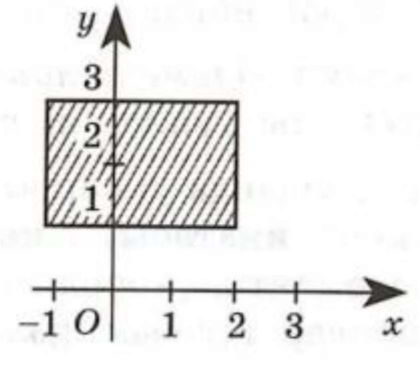
Мисал 2. $A = \{1; 4; 5\}, B = 2; 3$ өчен $A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (4; 2), (4; 3), (5; 2), 5; 3)\}$, $B \times A = (2; 1), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 4), (3; 5)$. Моннан без $A \times B \neq B \times A$ икәнлеген күрәбез.

Әгәр A һәм B күплекләре реаль саннар күплегенең кече күплекчәләре булса, $A \times B$ туры тапкырчыгышын график рәвешендә күрсштергә була. Бу очракта беренче “тапкырлаучы” A күплеген – горизонталь Ox күчәрендә, ә икенче “тапкырлаучы” B күплеген вертикаль Oy күчәрендә алалар.

Мисал 3. $A = [1; 3], B = [-1; 2]$ булсын. Ул вакытта $A \times B$ туры тапкырчыгышы – 1.13 нче рәсемдә күрсәтелгән турыпочмаклык, ә $B \times A$ күплеге 1.14 нче рәсемдә күрсәтелгән турыпочмаклык була.

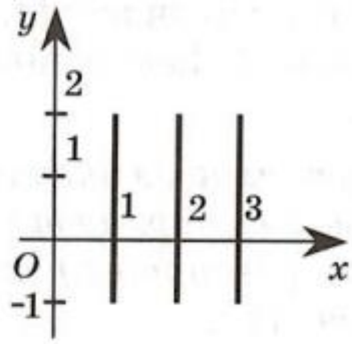


Рәс. 1.13

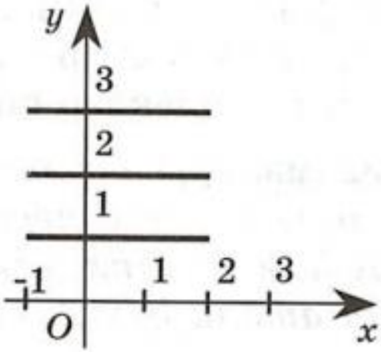


Рәс. 1.14

Мисал 4. . $A = \{1; 2; 3\}, B = [-1; 2]$ булсын. $A \times B$ күплеге 1.15 нче рәсемдә өч вертикаль кисемтә рәвешендә күрсәтелә, ә $B \times A$ күплеге 1.16 нчы рәсемдәге өч горизонталь кисемтә була.



Рәс. 1.15



Рәс. 1.16

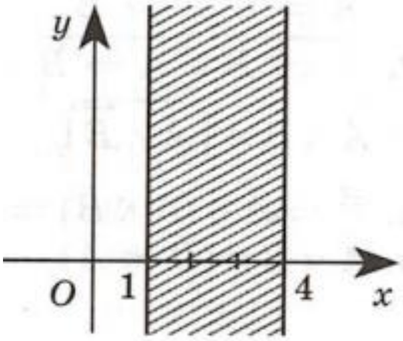
Шулай ук өч, дүрт һәм күбрәк сандагы күплекләрнең дә туры тапкырчыгышларын билгеләргә була. Мәсьәлән, $A \times B \times C = \{(a; b; c) | a \in A, b \in B, c \in C\}$, $\boldsymbol{R}^3 = \{(a, b, c) | a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R}, c \in \boldsymbol{R}\}$ h. б.

Күнегүләр

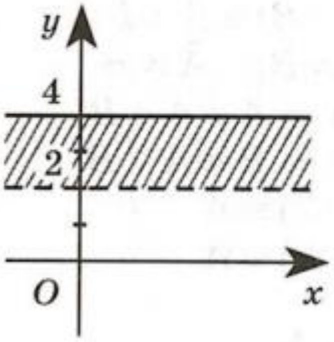
1. A = [1; 4], B= [-2; 2], C = $\boldsymbol{R}$ булса, $A \times (B \cup C)$ һәм $C \times (A \setminus B)$ күплекләрен табыгыз.

Чишү. Башта $B \cup C = [-2; 2] \cup \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}$ күплеген табабыз. Шуңа күрә $A \times (B \cup C)$ күплеге яклары $\boldsymbol{Oy}$ күчәренә параллель булган һәм $(1; 0), (4; 0)$ нокталары аша узучы чиксез тасма нокталары була (рәс. 1.17).

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = (2; 4]$ булганга күрә, $C \times (A \setminus B)$ күплеге яклары $\boldsymbol{Ox}$ күчәренә параллель һәм $(0; 2), (0; 4)$ нокталары аша узучы чиксез тасма була һәм аның $(0; 2)$ ноктасы аша үтүче ягы бу күплеккә керми (рәс. 1.18).



Рәс. 1.17



Рәс. 1.18

2. $(A\backslash B)\times C=(A\times C)\cap(\bar{B}\times C)$ тигезлеген исбатлагыз.

Чишү. Билгеле булганча, күплекләрнең тигезлеген исбатлау өчен, сул яктагы күплекнең уң яктагы күплекнең күплекчәсе һәм, киресенчә, уң яктагы күплекнең сул яктагысының күплекчәсе икәнен күрсәтергә кирәк. $(x,y)\in(A\backslash B)\times C$ булсын. Туры тапкырчыгышның билгеләмәсе буенча, $x,y\in A\backslash B$ һәм $y\in C$**,** ягъни $x\in A$ һәм $x\notin B$, ә $y\in C$. Шулай итеп, $x\in A$**,** $y\in C$ һәм $x\in\bar{B}$, $y\in C$**.** Бу нәтиҗә $(x,y)\in A\times C$ һәм $(x,y)\in\bar{B}\times C$ икәнен аңлата. Димәк, $(x,y)\in A\times C\cap(\bar{B}\times C)$**.** Шулай итеп, $(A\backslash B)\times C\subset(A\times C)\cap(\bar{B}\times C)$ булганлыгы исбатланды.

Хәзер $(x,y)\in(A\times C)\cap(\bar{B}\times C)$**.** булсын, ягъни $(x,y)\in A\times C$ һәм $(x,y)\in\bar{B}$ x C**..** Моннан $x\in A,y\in C$**,** һәм $x\in\bar{B}$ икәнен күрәбез. Димәк, $x\in A\backslash B,y\in C$**.** Бу нәтиҗә $(x,y)\in(A\backslash B)\times C$ икәнен бирә. Димәк, $(A\times C)\cap(\bar{B}\times C)\subset(A\backslash B)\times C$. Безгә нәкъ шуны исбатларга кирәк иде дә.

2 нче бүлек

БИНАР БӘЙЛӘНЕШЛӘР

§ 2.1. Бинар бәйләнешләр һәм аларны бирү ысуллары

1. Бинар бәйләнеш билгеләмәсе һәм мисаллары

Математика әйләнә-тирәдәге объектларны гына түгел, бәлки бу объектлар арасындагы бәйләнешләрне дә өйрәнә. Мәсәлән, фигураларның мәйданнарын исәпләгәндә, без һәрбер фигурага тиңдәшле итеп ниндидер сан куябыз; тигезләмәләр чишкәндә, һәрбер тигезләмәгә аның чишелеше булырлык саннар тиңдәш була; кешенең яшен билгеләгән вакытта, һәрбер кешегә тиңдәш итеп, ул яшәгән еллар санын, ягъни ниндидер сан куябыз. Шулай ук һәрбер кешегә фамилиясенең беренче хәрефен тиңдәш итеп куярга мөмкин. Әлеге мисалларда сүз ике күплек элементлары арасындагы бәйләнешләр турында бара. Мондый бәйләнешләрне өйрәнү өчен, математикада бинар бәйләнешләр теориясе булдырылган.

A һәм B күплекләре элементлары арасындагы теләсә нинди бәйләнешне шушы күплекләр элементларыннан төзелгән тәртип- ләштерелгән парлар күплеге итеп карарга мөмкин. Тәртипләш- терелгән пар туры тапкырчыгыш элементы булып торганлыктан түбәндәге билгеләмәне бирергә була.

Билгеләмә. *A һәм B күплекләренең туры тапкырчыгышының теләсә нинди кече күплеге A һәм B күплекләрендә бирелгән бинар бәйләнеш дип атала.*

Гадәттә, бинар бәйләнеш R хәрефе белән тамгалана. Димәк, $R \subset A \times B$.

Әгәр $A = B$, ягъни $R \subset A \times A$ булса, R бинар бәйләнеше A күплегендә бирелгән диләр.

Мисаллар

1. A күплеге мәйданнары тиңдәшле рәвештә $2,3,4\,\text{см}^2$ булган өч геометрик фигурадан торган күплек булсын: $A = \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$. Ул вакытта һәрбер фигурага үзенең мәйданын тиңдәш итеп куючы R бинар бәйләнеше түбәндәге рәвештә булачак:

$R = \{(F_1; 2), (F_2; 3), (F_3; 4)\}$. Әгәр $B = \{2;\ 3;\ 4\}$ булса, $R \subset A \times B =$ $= \{(F_1; 2), (F_1; 3), (F_1; 4), (F_2; 2), (F_2; 3), (F_2; 4), (F_3; 2), (F_3; 3), (F_3; 4)\}$

2. $A = f_1 : 5 + x = 4,\ f_2 : x^2 - 5x + 6 = 0$ — f_1 һәм f_2 тигезләмәләре җыелмасы, $B = 1,2,3$ булсын. Һәрбер тигезләмәгә аның чишелешен тиңдәш итеп куючы $\boldsymbol{R}$ бинар бәйләнешенең элементлары булып $(f_2;\ 2)$ һәм $(f_2; 3)$ парлары тора, ягъни $R = (f_2; 2), (f_2; 3)$. Бу мисалда $A \times B =$ $(f_1; 1), (f_1; 2), (f_1; 3), (f_2; 1), (f_2; 2), (f_2; 3)$. Моннан $R \subset A \times B$ икәнлеге күренә.

3. A группадагы студентлар күплеге булсын, $B = \boldsymbol{N}$.

Бу мисалда $A \times B$ күплегенең элементлары чиксез күп булачак. Һәрбер студентка аның бөтен санга кадәр түгәрәкләнгән яшен тиңдәш итеп куючы R бинар бәйләнеше түбәндәгечә күрсәтелер:

$R = \{(a, b) | b$ саны— a студентының яше$\} \subset A \times B$.

R бәйләнешенең элементлар саны бирелгән группадагы студентлар санына тигез булачак.

4. A = {Ильясов, Галиев, Салихов, Габбасов} — күрсәтелгән фамилияләргә ия булган 4 кешедән торган күплек, ә B алфавиттагы хәрефләр күплеге булсын. A күплегеннән булган һәр кешегә аның фамилиясенең беренче хәрефен тиңдәш итеп куючы R бинар бәйләнешенең элементларын язып чыгыйк:

$R = \{$(Ильясов, И), (Галиев, Г), (Салихов, С), (Габбасов, Г)$\} \subset A \times B$.

$A = B$ очрагына мисаллар карыйк.

5. $A = 1; 2; 3$ булсын. Ул вакытта $A \times A =$ $= \{(1;\ 1), (1;\ 2), (1;\ 3), (2;\ 1), (2;\ 2), (2;\ 3), (3;\ 1), (3;\ 2), (3;\ 3)\}$. Әлеге A күплегендә «тигез булу» бәйләнешен карыйк. Бу бәйләнешкә $a = b$ булган барлык (a, b) парлары керә. Шулай итеп, $R = (1; 1), (2; 2), (3; 3) \subset$ $\subset A \times A$.

6. $A = 1; 2; 3$ күплегендә «кечерәк булу» бәйләнешен карыйк. Бу очракта $R = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\} \subset A \times A$.

7. Әгәр $A = \{1; 2; 3\}$ күплегендә бирелгән R — «зур түгел» бәйләнеше булса, ул вакытта

$R\ = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;2),(2;3),(3;3)\} \subset A \times A.$

8. $A = B = \boldsymbol{N}$ күплегендә R «бүленүчәнлек» бәйләнеше булсын, ягъни $R = \{(a,b)|a \vdots b\}$. R күплеге чиксез күп элементлардан торачак. Бу элементларның кайберләрен язып чыгыйк:

$R = \{(1;1),(2;1),(2;2),(4;2),(6;2),(6;3),\ldots\} \subset \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}.$

9. A — яссылыктагы турылар күплеге, ә R турыларның параллель булу бәйләнеше булсын. Ягъни $R\ = \{(a,b)|a$ турысы b турысына параллель$\} \subset A \times A$.

10. A — яссылыктагы өчпочмаклар күплеге (чиксез күплек), ә R охшашлык бәйләнеше булсын. Ул вакытта $R = \{(a,b)|\Delta a \sim \Delta b\} \subset A \times A$.

Әгәр a элементы b элементы белән бирелгән R бәйләнешендә торса, бу фактны aRb рәвешендә дә язып була. Әгәр $R :=, >, <, \geq, \leq$ һ. б. бинар бәйләнешләр булса, aRb урынына $a\ =\ b, a\ >\ b, a <\ b, a \geq\ b,\ a \leq\ b$ һ. б. дип язалар.

Билгеләмә. *R бинар бәйләнеше элементларының барлык беренче координаталары күплеге бу бәйләнешнең билгеләнү өлкәсе дип атала.*

R бәйләнешнең билгеләнү өлкәсе $Dom\,R$ (инглизчә Domain — өлкә) дип тамгалана. Шулай итеп, $Dom\ R = \{a|aRb\}$.

Билгеләмә. *R бинар бәйләнеше элементларының барлык икенче координаталары күплеге бу бәйләнешнең кыйммәтләр өлкәсе дип атала.*

R бәйләнешенең кыйммәтләре өлкәсе $Im\ R$ *(инглизчә* Image — сурәт) дип тамгалана. Димәк, $Im\,R\ =\ \{b|\ aRb\}$.

Югарыда күрсәтелгән мисалларда бирелгән R бәйләнешләренең билгеләнү һәм кыйммәтләре өлкәләрен ачыклыйк.

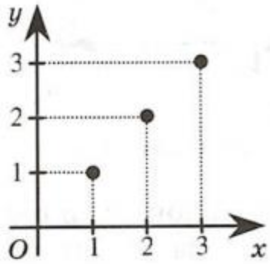
1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 нчы мисалларда — $Dom\,R = A,$ 2 нче мисалда — $Dom\,R\ = \{f_2\} \subset A$, 6 нчы мисалда — $DomR = \{1;2\} \subset A$. 1, 5, 7, 8, 9, 10 нчы мисалларда — $Im\,R = B,$ 2 нче мисалда —Im$R = \{2;3\} \subset B$, 3 нче мисалда — Im $R = \{\mathrm{n}\ |\mathrm{n}\ \in \mathbf{N}, 16\ \leq\ \mathrm{n} \leq\ 20\} \subset B$, 4 нче мисалда — Im$R = \{\text{И};\text{Г};\text{С}\} \subset B$, 6-нчы мисалда — Im$R = \{2;3\} \subset B$.

2. Бинар бәйләнешне бирү ысуллары

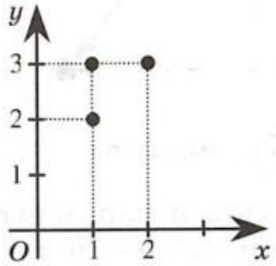
1. Бинар бәйләнешне биргәндә, аның *элементларын санап чыгарга* мөмкин. Югарыда күрсәтелгән 1, 2, 4, 5, 6, 7 нче мисалларда әлеге ысул кулланылды.

2. Бинар бәйләнешне аның элементларының беренче һәм икенче координаталарын бәйләүче *характеристик үзлек ярдәмендә* биреп була. 3, 8, 9, 10 нчы мисалларда бу ысул кулланылды. 5, 6, 7 нче мисалларда күрсәтелгән бинар бәйләнешне дә, шушы ысул ярдәмендә, $R = \{(a, b)|a = b\}$, $R = \{(a, b)|a < b\}, R = \{(a, b)|a \leq b\}$рәвешендә яза алабыз. Бинар бәйләнеш чиксез күп элементлардан төзелгән очракта бу ысул аеруча уңайлы була.

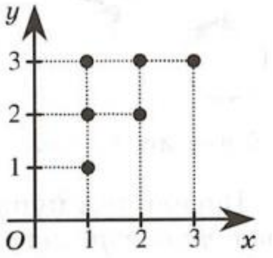
3. Бинар бәйләнешне *график юл белән*, ягъни яссылыктагы нокталар ярдәмендә бирергә була. Бу ысулдан файдаланганда ике үзара перпендикуляр күчәр сайлап алалар. Горизонталь күчәрдә A күплеге элементларын билгелиләр һәм һәр элемент аша вертикаль турылар үткәрәләр. Вертикаль күчәрдә B күплеге элементларын билгелиләр һәм аларның һәрберсе аша горизонталь турылар үткәрәләр. Бу турыларның кисешү нокталары $A \times B$ күплегенең элементларын сурәтли. $R \subset A \times A$ булганлыктан, табылган кисешү нокталарының бер өлеше B бәйләнешен күрсәтәчәк. Аларны зур нокталар белән билгелиләр. Бирелгән A һәм B күплекләре реаль саннар күплекләре яки реаль саннар күплегенең кече күплекләре булган очракта әлеге ысул бигрәк тә уңайлы. 5, 6, 7 нче мисалларда бирелгән бинар бәйләнешләрне график юл белән сурәтлик:



5 нче мисал рәс.



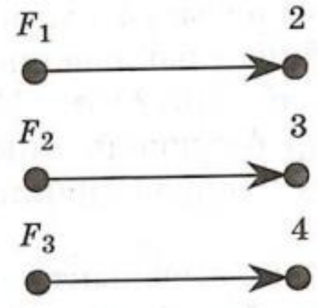
6 нчы мисал рәс.



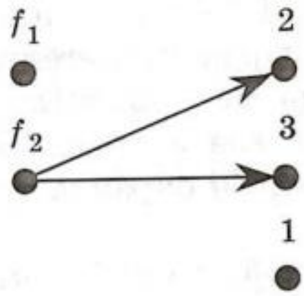
7 нче мисал рәс.

4. Чикле сандагы элементлардан торган күплекләрдә бирелгән бинар бәйләнешләрне *графлар ярдәмендә* сурәтләү уңайлы. Граф — ул яссылыктагы нокталар һәм уклар күплегеннән төзелгән фигура. Бинар бәйләнешне граф ярдәмендә сурәтләү өчен, сул якта вертикаль турыда урнашкан нокталар рәвешендә — A күплеге элементларын, уң якта — B күплеге элементларын сурәтлиләр. Аннары һәрбер $(a, b) \in R$ пары өчен a ноктасыннан b ноктасына ук үткәрәләр.

Югарыда күрсәтелгән кайбер бинар бәйләнешләрнең графларын карыйк:



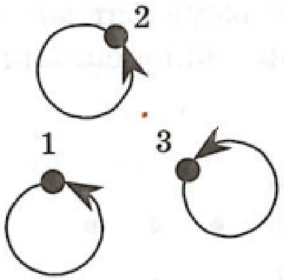
1 нче мисал рәс.



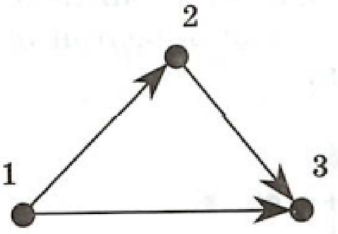
2 нче мисал рәс.

4 нче мисал рәс.

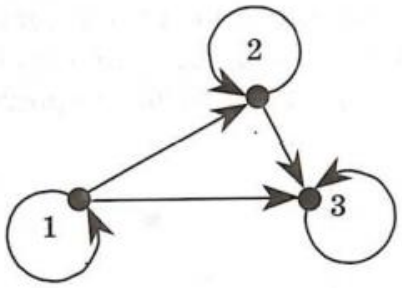
$A = B$ очрагында башка төрле графлар кулланыла. Бу вакытта яссылыкта нокталар рәвешендә A күплеге элементларын сурәтлиләр һәм барлык $(a, b) \in R$ парлары өчен a ноктасыннан b ноктасына ук үткәрәләр. Әгәр $(a, a) \in R$ булса, a ноктасы тирәсендә элмәк ясыйлар. 5, 6, 7 нче мисаллардагы бинар бәйләнешләрне шушы рәвештә сурәтлик:



5 нче мисал рәс.



6 нчы мисал рәс.



7 нче мисал рәс.

Бирелгән **A** күплеге элементларын сурәтләүче нокталар графның *түбәләре*, ә графның түбәләрен тоташтыручы уклар аның *кабыргалары* дип атала. Югарыда күрсәтелгән графларның өч түбәсе, беренче һәм икенче графта өчәр кабырга, ә өченче графта алты кабырга бар.

Күнегүләр

1. $A = \{7; 20; 16; 35\}, B = \{16; 21; 28\}$, ә B бинар бәйләнеше A һәм B күплекләрендә бирелгән «кечерәк яки тигез булу» бәйләнеше булсын.

а) $A \times B$ күплеген, R бәйләнешенең билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

б) 16 саны нинди элементлар белән R бәйләнешендә тора?

в) Нинди элементлар 28 саны белән R бәйләнешендә тора?

Чишү.

а) $A \times B = \{(7;\ 16),\ (7;\ 21),\ (7;\ 28),\ (20;\ 16),\ (20;\ 21),\ (20;\ 28),$ $(16;\ 16),\ (16;\ 21),\ (16;\ 28),\ (35;\ 16),\ (35;\ 21),\ (35;\ 28)\}$

$R = \{(a, b) | a \leq b\} = \{(7;\ 16), (7;\ 21), (7;\ 28), (20;\ 21), (20;\ 28),$ $(16;\ 16), (16; 21), (16; 28)\}.$

Димәк, $Dom\, R = \{7; 20; 16\} \subset A, Im\, R = \{16;\ 21; 28\} \subset B.$

б) Безгә $(16; b) \in R$ шартын канәгатьләндерүче b саннарын табарга кирәк. Мондый саннар булып 16, 21, 28 тора.

в) $(a; 28) \in R$ шартын канәгатьләндерүче a саннары 7, 16, 20 була.

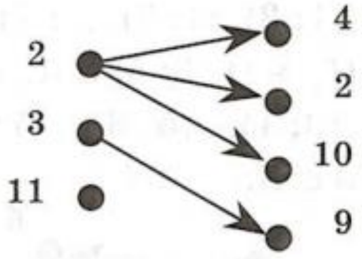
2. $A = \{2;\ 3;\ 11\}, B = \{4; 2; 10; 9\}$, ә H_1 — «кечерәк булу» бәйләнеше, H_2 «бүлүче булу» бәйләнеше булсын. $A \times B$ күплегенең, H_1 һәм H_2 бәйләнешләренең барлык элементларын языгыз, H_1 һәм H_2 бәйләнешләрен графлар ярдәмендә сурәтләгез, аларның билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

Чишү.

$A \times B$= {(2; 4), (2; 2), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 2), (3; 10), (3; 9), (11; 4), (11; 2), (11; 10), (11; 9)}, H_1={(a, b) / a<b}={(2;4),(2;10),(2;9),(3;4),(3;10),(3;9)}, H_2={$(a, b)|a$ саны b санының бүлүчесе }= {(2;4),(2;2),(2;10),(3;9)}.

Бу бәйләнешләрне графлар ярдәмендә сурәтлик:

H_1 бәйленеше



H_2 бәйленеше

$Dom\ H_1 = \{2; 3\} \subset A, Dom\ H_2 = \{2; 3\} \subset A, Im\ H_1 = \{4; 10; 9\} \subset B,$
$Im\ H_2 = \{4; 2; 10; 9\} = B.$

Графта $Dom\ R$ — уклар чыккан нокталар күплеге, $Im\ R$ — уклар кергән нокталар күплеге.

1. $A = \{4; 6; 8; 10\}$ күплегендә а) «кечерәк булу», б) «тигез булу», в) «кечкенә яки тигез булу» бәйләнешләре бирелгән. Бу бәйләнешләрнең барлык элементларын языгыз һәм аларны графлар ярдәмендә сурәтләгез, билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

Чишү.

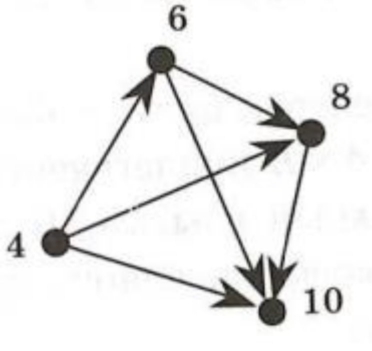
а) $H_1 = \{(4; 6), (4; 8), (4; 10), (6; 8), (6; 10), (8; 10)\},$

$Dom\ H_1 = \{4; 6; 8\} \subset A,\ Im\ H_1 = \{6; 8; 10\} \subset A.$

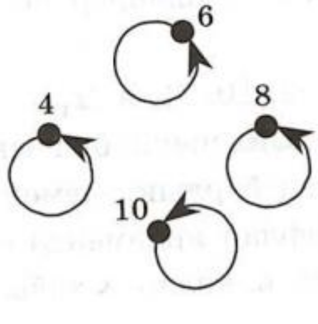
б) $H_2 = \{(4; 4), (6; 6), (8; 8), (10; 10)\}, Dom\ H_2 = Im\ H_2 = A.$

в) $H_3 =$
$\{(4; 4), (4; 6), (4; 8), (4; 10), (6; 6), (6; 8), (6; 10), (8; 8), (8; 10), (10; 10)\},$

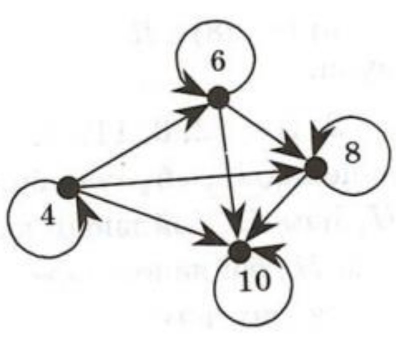
$Dom\ H_3 = \{4; 6; 8\} \subset A,\ Im\ H_3 = \{4; 6; 8; 10\} = A.$



H_1 бәйленеше



H_2 бәйленеше



H_3 бәйленеше

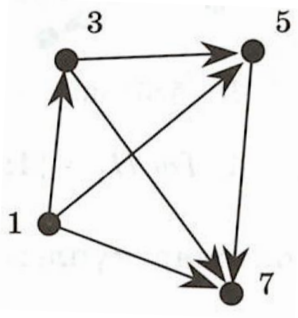
4. $A = \{1; 3; 5; 7\}$ күплегендә $H_1 = \{(a, b) | b \geq a + 1\}$ һәм $H_2 = \{(a, b) | b = a - 2\}$ бәйләнешләре бирелгән. Бу бәйләнешләрнең графларын төзегез, билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

Чишү.

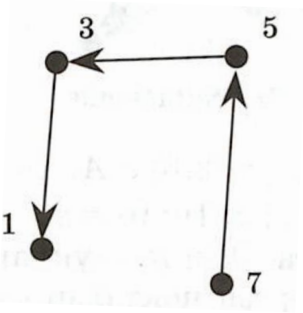
$H_1 = \{(1;3),(1;5),(1;7),(3;5),(3;7),(5;7)\}$,

$Dom\, H_1 = \{1;3;5\} \subset A,\ Im\, H_1 = \{3;5;7\} \subset A$.

$H_2 = \{(3;1),(5;3),(7;5)\}, DomH_2 = \{3;5;7\} \subset A, ImH_2 = \{1;3;5\} \subset A$.



H_1 бәйленеше

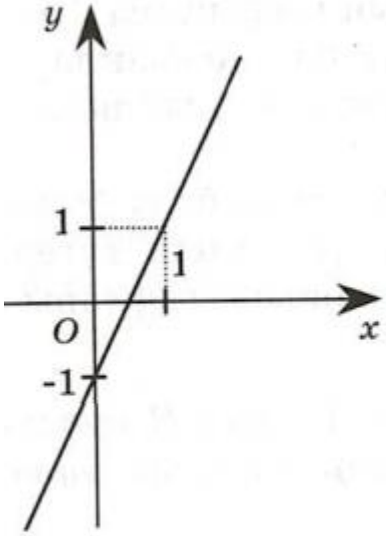


H_2 бәйленеше

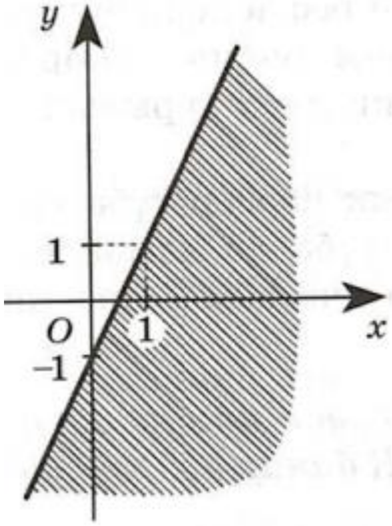
5. ***R*** күплегендә бирелгән $H_1 = \{(x,y)|2x-y=1\}, H_2 = \{(x;y)|2x-y \geq 1\}, H_3 = \{(x,y)|2x-y<1\}, H_4 = \{(x,y)|y=x^2\},\ H_5 =$ $= \{(x,y)|y=-x^2\}, H_6 = \{(x,y)|x^2=y^2\}$ бинар бәйләнешләрнең графикларын төзегез, аларның билгеләнү һәм кыйммәтләр өлкәләрен табыгыз.

Чишү. H_1 бинар бәйләнешенең графигы булып $y = 2x - 1$ тигезләмәсе белән бирелгән туры тора. Графиктан $Dom\, H_1 = \boldsymbol{R},\ Im\, H_1 = \boldsymbol{R}$ булуы күренә.

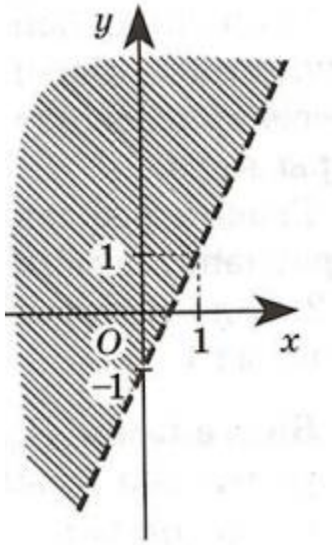
H_1 бәйләнешенең графигын төзү өчен, $2x - y \geq 1$ тигезсезлеген y үзгәрешлесенә карата чишәбез: $y \leq 2x - 1$. Ягъни H_2 бәйләнешенең графигына $y = 2x - 1$ турысының нокталары һәм бу турыдан астарак ятучы ярымъяссылык нокталары керә. $Dom\, H_2 = \boldsymbol{R}, Im\, H_2 = \boldsymbol{R}$



H_1 графигы

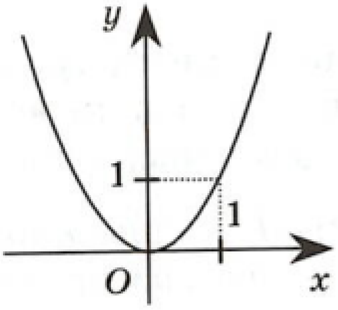


H_2 графигы

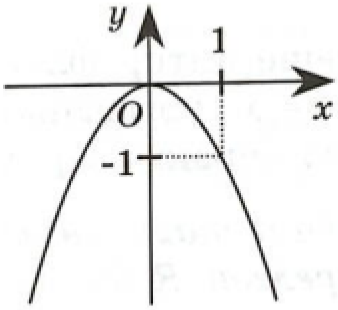


H_3 графигы

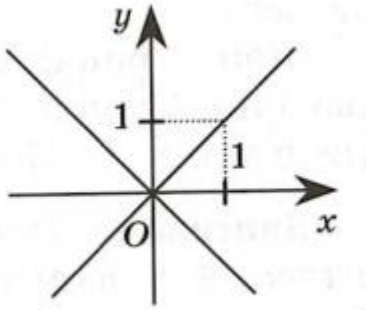
$y > 2x - 1$ шартыннан күренгәнчә, H_3 бәйләнешенең графигы булып $y = 2x - 1$ турысыннан өстәрәк ятучы ярымъяссылык тора, ләкин бу туры нокталары үзләре графикка керми. $Dom\ H_3 = \boldsymbol{R}, Im\ H_3 = \boldsymbol{R}$



H_1 графигы



H_2 графигы



H_3 графигы

$Dom\ H_4 = \boldsymbol{R},\ Dom\ H_5 = \boldsymbol{R},\ Dom\ H_6 = \boldsymbol{R},$

$Im\ H_4 = [0; \infty), Im\ H_5 = (-\infty; 0],\ Im\ H_6 = \boldsymbol{R}.$

§ 2.2. Бинар бәйләнешләрнең төп үзлекләре

Билгеләмә. *Әгәр теләсә нинди* $a \in A$ *өчен* $(a, a) \in R$ *булса,* A *күплегендә бирелгән* R *бинар бәйләнеше рефлексив бәйләнеш дип атала.*

A = {1; 2; 3} күплегендә бирелгән R =$\{(a, b)|a \leq b\}$ бәйләнеше, шулай ук яссылыктагы турылар күплегендә бирелгән «параллель булу» бәйләнеше рефлексив бәйләнешләргә мисал булып тора. Чөнки беренче очракта (1; 1), (2; 2), (3; 3) ∈ R, икенче очракта теләсә нинди a турысы үз-үзенә параллель дип санала, ягъни теләсә нинди $a \in A$ өчен $(a,\ a) \in R$.

Әгәр бинар бәйләнеш рефлексив булса, аның графигына $A \times A$ күплегенең беренче һәм өченче координаталар почмаклары биссектрисасында (ягъни $y = x$ турысында) ятучы барлык нокталары керә.

Графта рефлексивлык һәрбер түбә янында элмәк булу белән сурәтләнә, ягъни бер түбә дә элмәксез булырга тиеш түгел. (§ 2.1. дә китерелгән 5 нче һәм 7 нче мисалларның графларын карагыз.)

Билгеләмә. *Әгәр теләсә нинди* $a \in A$ өчен $(a, a \notin R$ булса, A *күплегендә бирелгән* R *бинар бәйләнеше антирефлексив бәйләнеш дип атала.*

A = {1; 2; 3} күплегендә бирелгән R = $\{(a, b)|a \leq b\}$ бинар бәйләнеше антирефлексивлык бәйләнешенә мисал булып тора, чөнки теләсә нинди $a \in A$ өчен $a < a$ шарты үтәлми, ягъни $(a, a) \in R$. Антирефлексивлык бәйләнешенең икенче мисалы булып яссылыктагы турылар күплегендә бирелгән перпендикулярлык бәйләнеше тора, чөнки бер генә туры да үз-үзенә перпендикуляр була алмый.

Әгәр R бинар бәйләнеше антирефлексив икән, аның графигына $A \times A$ күплегендәге $y = x$ турысының бер ноктасы да керергә тиеш түгел. Графта исә бу очракта бер элмәк тә булмаска тиеш.

Билгеләмә. *Әгәр* $(a, b) \in R$ *шартыннан*$(b, a) \in R$ *булуы килеп чыкса,* A *күплегендә бирелгән* R *бинар бәйләнеше симметрик бәйләнеш дип атала.*

Натураль саннар күплегендә бирелгән «тигез булу» һәм яссылыктагы турылар күплеендә бирелгән «параллель булу» бәйләнешләре симметрик бәйләнеш мисаллары булып торалар.

Әгәр бинар бәйләнеш симметрик икән, аның графигына (a, b) ноктасы белән беррәттән (b, a) ноктасы да керергә тиеш, ягъни график $y = x$ турысына карата симметрик булырга тиеш.

Симметрик бинар бәйләнешнең графында барлык уклар да ике очлы була. Димәк, графта, элмәкләрдән башка, бер очлы уклар булмаска тиеш. Мәсәлән, натураль саннар күплегендә бирелгән «тигез булу» бәйләнешендә элмәкләрдән башка уклар юк. Моннан бер очлы укларның да булмаганлыгы килеп чыга. Шуңа күрә «тигез булу» бәйләнеше — симметрик бәйләнеш.

Билгеләмә. *Әгәр* $a \neq b$ *һәм* $(a, b) \in R$ *булганда,* $(b, a) \notin R$ *икәнлеге килеп чыкса, A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнеше анти-симметрик бәйләнеш дип атала.*

Кайвакытта бу билгеләмәнең башка төрле язылышы уңайлырак: антисимметрик бәйләнеш өчен $(a, b) \in R$ һәм $(b, a) \in R$ булганда, $a = b$ икәнлеге килеп чыгарга тиеш.

Мәсәлән, $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(a, b) | a \leq b\}$ бинар бәйләнеше антисимметрик була, чөнки $a \leq b$ һәм $b \leq a$ шартларыннан $a = b$ икәнлеге чыга.

Антисимметрик бәйләнешнең графигында $y = x$ турысына симметрик нокталар булмаска тиеш, ә (x, x) рәвешендәге парлар булса да ярый. Графта исә бары тик бер очлы гына уклар булырга тиеш, ягъни элмәкләрдән башка, ике очлы уклар булмаска тиеш.

Билгеләмә. *Әгәр* $a \neq b$ *һәм* $(a, b) \in R$ *булганда* $(a, c) \in R$ *булса, A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнеше транзитив бәйләнеш дип атала.*

Мәсәлән, $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(a, b) | a \leq b\}$ бәйләнеше транзитив, чөнки $a \leq b$ һәм $b \leq c$ булганда, $a \leq c$ була.

Әгәр R бинар бәйләнеше транзитив булса, аның графигына теләсә нинди (a, b) һәм (b, c) нокталары белән беррәттән (a, c) ноктасы да керә. Бу шуны аңлата: әгәр түбәләре (a, b), (a, b), (b, b) булган турыпочмаклык төзесәк (биредә беренче ике түбә графикта ятарга тиеш), ул вакытта турыпочмаклыкның дүртенче (a, c) түбәсе дә шулай ук графикта булырга тиеш. Транзитивлыкны әлеге ысул белән ачыклау бик үк уңайлы түгел, шуңа күрә ул практикада кулланылмый диярлек.

Графта транзитивлык түбәндәгене аңлата: әгәр a ноктасыннан b ноктасына һәм b ноктасыннан c ноктасына юнәлгән уклар булса, a ноктасыннан c ноктасына юнәлгән ук та булырга тиеш. Бу очракта графның (a, b) һәм (b, c) парларын сурәтләүче кабыргалар чылбыр тәшкил итә, ә (a, c) парын сурәтләүче кабырга бу чылбырның йомучысы була.

Графта транзитивлыкны ачыклау өчен, бер үк вакытта уклар кергән һәм уклар чыккан барлык түбәләр билгеләнә. Шул рәвешчә, ике кабыргадан торучы барлык чылбырлар табыла. Әгәр бу чылбырларның берсенең генә булса да йомучы кабыргасы булмаса, бирелгән бәйләнеш транзитив булмаячак.

Әгәр графта ике кабыргадан торучы бер чылбыр да булмаса, ул вакытта «йомучы кабыргасы булмаган ике кабыргадан торучы бер генә чылбыр да юк» дип әйтергә мөмкин. Шуңа күрә «ике кабыргадан торучы һәрбер чылбырның йомучы кабыргасы бар» дигән раслау дөрес була. Ә бу бирелгән бәйләнешнең транзитив икәнлеген аңлата.

Мәсәлән, «тигез булу» бәйләнешенең графын карасак, аның бары тик элмәкләрдән генә торуын күрәбез, ягъни ике кабыргадан торучы бер генә чылбыр да юк. Югарыда әйтелгәннәрдән чыгып, «тигез булу» бәйләнеше транзитив дигән нәтиҗә ясый алабыз.

Бер (a, b) парыннан торучы бинар бәйләнешнең графы бирелсен:

Бирелдә шулай ук ике кабыргадан торган бер чылбыр да юк. Димәк, бу бәйләнеш транзитив була.

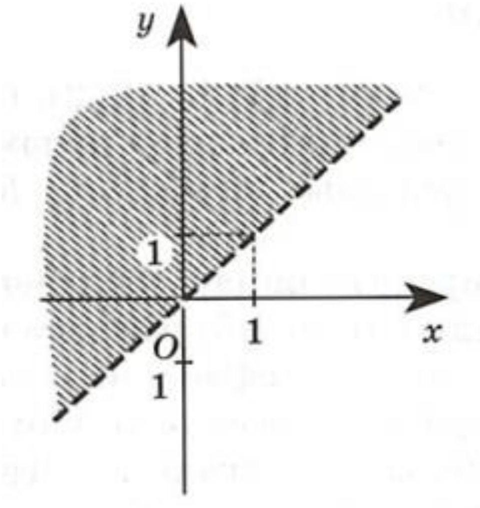
Билгеләмә. *Әгәр A күплегендәге теләсә нинди a, b элементлары өчен $a \neq b$ шартыннан $(a, b) \in R$ яки $(b, a) \in R$ булуы килеп чыкса, A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнеше бәйле бәйләнеш дип атала.*

Мәсәлән, $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(a, b) | a < b\}$ бәйләнеше — бәйле бәйләнеш, чөнки бер-берсенә тигез булмаган теләсә нинди реаль a һәм a саннары өчен яки $a < b$, яки $b < a$ була.

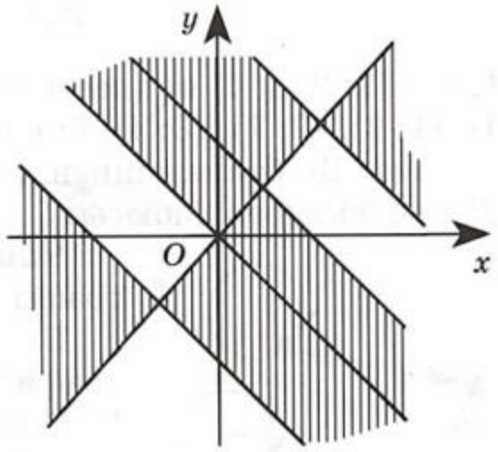
Бәйле бинар бәйләнеш графигына A^2 күплегенең теләсә нинди (a, b) ноктасы үзе яки аңа симметрик булган (b, a) ноктасы,ә бәлки икесе дә берьюлы керергә тиеш.

$\mathbf{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(a, b) | a < b\}$ бәйләнешенең графигын сурәтлик. Ул $y = x$ турысыннан өстәрәк ятучы ярымъяссылык булачак (рәс. 2.1).

Теләсә нинди $a, b \in \mathbf{R}$ $(a \neq b)$ өчен (a, b) ноктасы (әгәр $a < b$ булса) яки (b, a) ноктасы (әгәр $b < a$ булса) бу ярымъяссылыкка керәчәк.



Рәс. 2.1



Рәс. 2.2

$\mathbf{R}$ күплегендә бирелгән бәйле бәйләнешнең графигы (2.2) рәсемдәгечә дә булуы мөмкин.

Бу графиктан күренгәнчә, теләсә нинди $a, b \in \mathbf{R}$ $(a \neq b)$ өчен яки (a, b) ноктасы, яки (b, a) ноктасы, яки бу ноктлар икесе дә графикка керәләр.

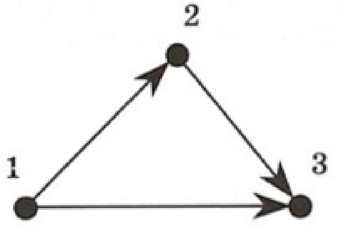
Бәйле бәйләнешнең графында теләсә нинди ике түбә иң кимендә бер ук белән тоташтырылган булырга тиеш.

Мәсәлән, $A = \{1; 2; 3\}$ күплегендә бирелгән $R = \{(a, b) | a < b)\}$ бинар бәйләнеше — бәйле бәйләнеш, чөнки аның графы түбәндәгечә күрсәтелә (рәс .2.3).

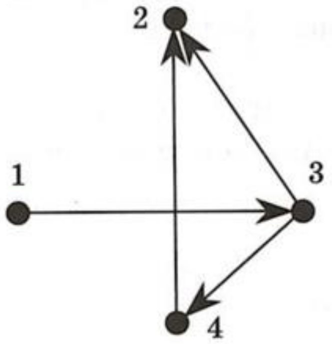
Бу графның теләсә нинди ике түбәсе (1 һәм 2; 1 һәм 3; 2 һәм 3 түбәләре) уклар белән тоташтырылган.

Тагын ике граф карап үтик (рәс. 2.4, 2.5).

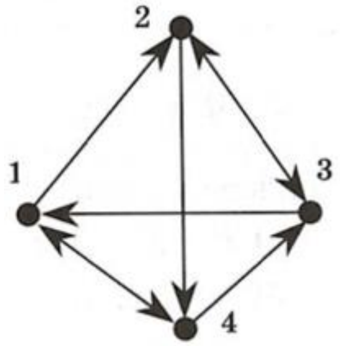
Бу графларның беренчесендә уклар белән тоташтырылмаган (1 һәм 2, 1 һәм 4) түбәләре бар. Бу күренеш $(1;\ 2) \notin R$ $(2;\ 1) \notin R$, $(1;\ 4) \notin R$, $(4;\ 1) \notin R$ дигәнне аңлата, ягъни бәйле булу шарты үтәлми. Икенче графта барлык түбәләр арасында да иң кимендә бер ук бар. Димәк, әлеге граф бәйле бәйләнешнең графы булып тора.



H_1 графигы



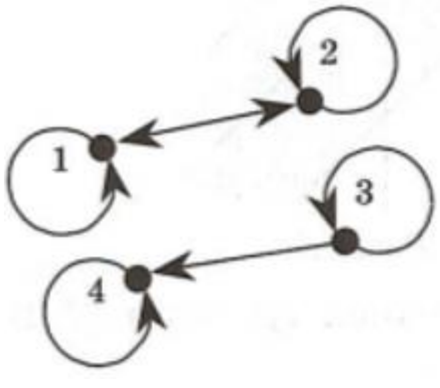
H_2 графигы



H_3 графигы

Күнегүләр

1. $A = \{1; 2; 3; 4\}$ күплегендә бирелгән $R = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(1;2),(2;1),(3;4)\}$ бинар бәйләнешен графлар ярдәмендә сүрәтләгез. Бу бәйләнешнең үзлекләрен ачыклагыз. $Dom\ R$ һәм $Im\ R$ күплекләрен табыгыз.



Рәс. 2.6

Чишү. Бирелгән бинар бәйләнешнең графы түбәндәге (рәс.2.6.) рәвештә була.

Бу бәйләнеш – рефлексив, чөнки графның һәрбер түбәсендә элмәк бар. Графта ике очлы ук булганга, әлеге бәйләнеш симметрик түгел. Графта ике очлы ук булганга, ул антисимметрик та була алмый. Графта ике кабыргадан торучы телэсэ нинди чылбыр өчен йомучы кабырга барлыгыннан бирелгән бәйләнешнең транзитив икәнлеге килеп чыга. Түбәндә бу чылбырларны күрсәтик:

$$2 \to 1 \to 2 \qquad\qquad 1 \to 2 \to 1$$

Беренче чылбыр өчен $2 \to 2$ йомучы кабырга була, ягъни 2 түбәсе янында элмәк бар. Ә икенче чылбыр өчен $1 \to 1$ йомучы кабырга була, ягъни 1 түбәсе янында элмәк бар.

Бирелгән R бәйләнеше бәле бәйләнеш түгел, чөнки графта уклар белән тоташтырылмаган нокталар бар (мәсәлән, 1 һәм 4, 1 һәм 3 һ.б.). $Dom\,R = Im\,R = A$ була.

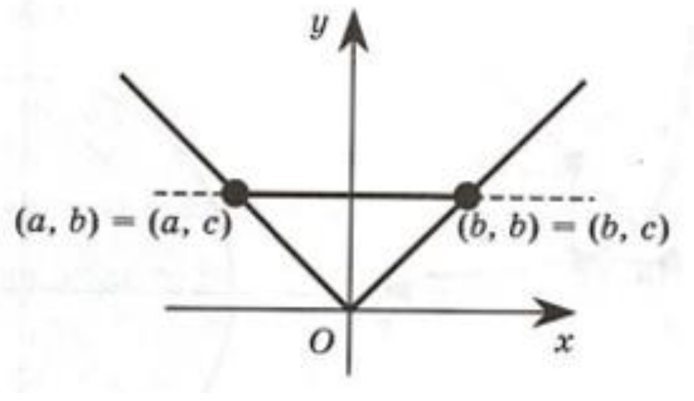
Искәрмә. Бинар бәйләнешнең графына карап $A \times A$ күплегенең нindидер элементларын R бәйләнешенә өстәгәндә яки R бәйләнешеннән алып ташлаганда, башка үзлекләргә ия булган яңа бәйләнеш табарга була. Мәсәлән, югарыда каралган мисалда $(4; 3)$ парын өстәсәк, яңа бәйләнеш симметрик булачак. Әгәр $(1; 2)$ парын алып ташласак, табылган бәйләнеш антисимметрик булачак.

2. $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешенең графигын төзегез. Аның үзлекләрен ачыклагыз. $Dom\,R,\ Im\,R$ күплекләрен табыгыз.

а) $R = \{(x, y) |\ y = |x|\}$,

б) $R = \left\{(x, y) |\ y = x \text{ яки } y = \frac{1}{x}\right\}$,

в) $R = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 \leq 1\}$



Рәс. 2.7

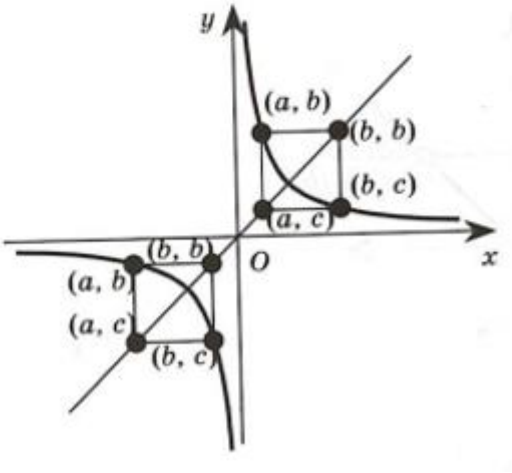
Чишү. а) Бирелгән бинар бәйләнешнең графигы түбәндәге (рәс. 2.7) рәвештә була.

Бу бәйләнеш рефлексив түгел, чөнки $y = x$ турысының барлык нокталары да графикка керми. Ул шулай ук антирефлексив та түгел, чөнки $y = x$ турысының бер өлеше графикка керә. График $y = x$ турысына карата симметрик булмаганга, бирелгән бәйләнеш симметрик түгел. Графикта (x, x) рәвешендәге нокталардан башка $y = x$ турысына карата симметрик нокталар булмау сәбәпле, R — антисимметрик бәйләнеш. Бирелгән бәйләнешнең транзитив икәнлеген тикшерик. Моның өчен графикта ятучы ирекле (a, b) ноктасын алабыз һәм аның ярдәмендә (b, b) ноктасын табабыз ((b, b) ноктасының графикта булуы мәҗбүри түгел). Аннан соң графикта булган (b, c) ноктасын табып, түбәләре $(a, b), (b, b), (b, c)$ булган турыпочмаклык төзибез һәм (a, c) түбәсен табабыз. Безнең мисалда ике очрак булуы мөмкин.

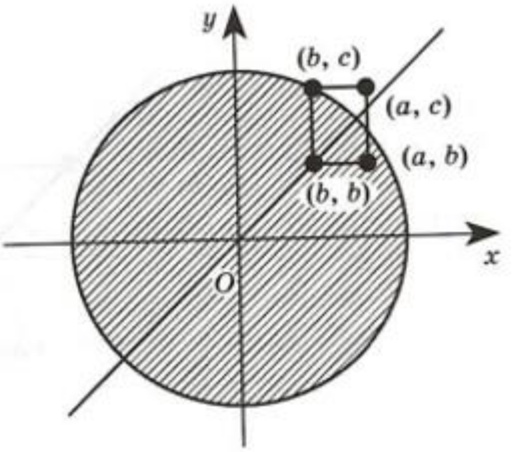
Әгәр (a, b) ноктасы $y = x$ турысында ятса, $a = b = c, (a, b) = (b, b) = (b, c) = (a, c)$ була, һәм турыпочмаклык ноктага әверелә. (a, b) ноктасы $y = -x$ турысында яткан очракта $a \neq b (a = -b)$. Шуңа күрә төзелгән турыпочмаклык очлары $(a, b) = (a, c)$ һәм $(b, b) = (b, c)$ булган кисемтәгә әйләнә (рәсемне карагыз). Ике очракта да (a, c) түбәсе графикта була. Димәк, бу бәйләнеш — транзитив.

Графиктан күренгәнчә, бирелгән бәйләнеш — бәйле түгел, чөнки яссылыкта графикка кермәгән $(a, b), (b, a)$ нокталары чиксез күп. График буенча $Dom\ R = \mathbf{R}, Im\ R = [0, \infty)$ булуын ачыклый алабыз.

б) Бирелгән бинар бәйләнешнең графигы болай (рәс. 2.8) булачак:



Рәс. 2.8



Рәс. 2.9

Графиктан бирелгән бәйләнешнең рефлексив, симметрик икәнлеге һәм бәйле булмавы күренә. Транзитивлыкны исбатлыйк. Графиктан ирекле (a, b) ноктасы алыйк һәм $y = x$ турысында ятучы (b, b) ноктасын төзик (гомуми очракта (b, b) ноктасының графикта ятуы мәҗбүри түгел). Аннары графикка кергән (b, c) ноктасын табып, түбәләре $(a, b), (b, b), (b, c)$ булган турыпочмаклык төзибез. Бу турыпочмаклыкның дүртенче түбәсенең координаталары (a, c) булачак. Транзитив бинар бәйләнеш өчен (a, c) түбәсе графикта ятарга тиеш. Әлеге шарт графикта яткан теләсә нинди (a, b) ноктасы өчен тикшерелә. Безнең рәсемдә (a, b) һәм (b, c) түбәләре — гиперболада, ә (a, c) түбәсе $y = x$ турысында, ягъни графикта яткан шундый ике турыпочмаклык төзелгән. Әгәр (a, b) ноктасын $y = x$ турысында алсак, $(a, b) = (b, b)$ һәм $(b, c) = (a, c)$ була, ягъни турыпочмаклыкның ике түбәсе тәңгәл килә. Шулай итеп, бу очракта (a, c) түбәсе $y = \frac{1}{x}$ гиперболасында, ягъни графикта ятачак. $Dom\, R = \boldsymbol{R}, Im\, R = \boldsymbol{R}$.

в) Әлеге бинар бәйләнешнең графигы — үзәге координаталар башлангычында яткан, радиусы бергә тигез булган түгәрәк (рәс. 2.9).

$y = x$ турысының барлык нокталары графикта ятмау сәбәпле, бирелгән бәйләнеш рефлексив түгел. Ул шулай ук антирефлексив та түгел, чөнки $y = x$ турысының кайбер нокталары графикка керә. График $y = x$ турысына карата симметрик булганга күрә, бу бинар бәйләнеш — симметрик. Рәсемнән күренгәнчә, без төзегән турыпочмаклыкның $(a, b), (b, c), (b, b)$ түбәләре графикта ята, ә (a, c) түбәсе графикка керми. Димәк, бирелгән бинар бәйләнеш транзитив түгел.

3. A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешенең үзлекләрен ачыклагыз:

а) $R = \{(x, y) | (x - y) \vdots 3\},\ A = \boldsymbol{Z}$;

б) $R = \{(x, y) | (x - y)^2 = x - y\},\ A = \boldsymbol{R}$;

в) $R = \{(x, y) | (x - y) \in \boldsymbol{Z}\},\ A = \boldsymbol{Q}$.

Чишү. Бу мисалларда төп үзлекләрнең үтәлүен аларның билгеләмәләреннән чыгып тикшерербез.

а) $\forall x \in \boldsymbol{Z}$ өчен $x - x = 0$, ә 0 саны 3 санына бүленә. Моннан теләсә нинди $x \in \boldsymbol{Z}$ өчен $(x, x) \in R$, ягъни R бинар бәйләнеше — рефлексив.

Әгәр $x - y$ аермасы 3 санына бүленсә, $y - x = -(x - y)$ шулай ук 3 санына бүленә. Моннан, әгәр $(x, y) \in R$ булса, $(y, x) \in R$, ягыш R — симметрик бәйләнеш.

$(x - y), (y - z)$ аермалары 3 санына бүленсеннәр. Ул вакытта $x - z = = (x - y) + (y - z)$ аермасы да 3 санына бүленә. Димәк, $(x, y) \in R$ һәм $(y, z) \in R$ булудан $(x, z) \in R$ икәнлеге килеп чыга, ягъни R — транзитив бәйләнеш.

Әлеге бәйләнеш бәйле булмый, чөнки теләсә нинди бөтен $y \neq x$ саннары өчен яки$(x - y) \vdots 3$, яки $(y - x) \vdots 3$ дигән раслау дөрес түгел.

Мәсәлән, $x = 4$, $y = 5$ булсын. Ул вакытта $x - y = 4 - 5 = -1$ һәм $y - -x = 5 - 4 = 1$ саннарының берсе дә 3 санына бүленми.

б) Теләсә нинди $x \in \boldsymbol{R}$ өчен $(x, x) \in R$, чөнки $y = x$ булганда,$0^2 = 0$ — дөрес тигезлек. Димәк, R — рефлексив бәйләнеш. $(x, y) \in R$, ягъни $(x - y)^2 = = x - y$ булсын. Ул вакытта $y - x = -(x - y)^2 = -(y - x)^2$ ягъни $(y - x)^2 = = y - x$ шарты үтәлми. Моннан $(y, x) \notin R$, ягъни R симметрик бәйләнеш түгел.

Антисимметриклыкны тикшерик. $(x, y) \in R$ һәм $(y, x) \in R$, ягъни $(x - y)^2 = x - y$ һәм $(y - x)^2 = y - x$ булсын. Ул вакытта $(x - y)^2 = x - - y = -(y - x) = -(y - x)^2 = -(x - y)^2$. Моннан табабыз: $2(x - y)^2 = 0$, ягъни $x = y$. Бу нәтиҗә R бәйләнешенең антисимметрик икәнлеген күрсәтә.

Транзитивлыкны тикшерик, $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ булсын, ягъни $(x—y)^2 = x - y,\ (y - z)^2 = y - z.$ Табабыз: $(x - z)^2 = (x - y + y - z)^2 = = (x - y)^2 + 2(x - y)(y - z) + (y - z)^2 = (x - y) + 2(x - y)(y - z) + (y - - z) = (x - z) + 2(x - y)(y - z)$. Моннан $(x - z)^2 \neq (x - z)$, ягъни $(x, z) \notin \notin R$ булуы күренә. Димәк, R бәйләнеше транзитив түгел.

в) Теләсә нинди $x \in \boldsymbol{Q}$ өчен $x - x = 0 \in \boldsymbol{Z}$. Моннан теләсә нинди $x \in \boldsymbol{Q}$ өчен $(x, x) \in R$. Димәк, R — рефлексив бәйләнеш. $(x, y) \in R$, ягъни $x - y \in \boldsymbol{Z}$ булсын. Ул вакытта $(y - x) = -(x - y) \in \boldsymbol{Z}$, ягъни $(y, x) \in R$. Димәк, R —

симметрик бәйләнеш. $(x, y) \in R, (y, z) \in R$ булсын, ягъни $x - y \in \boldsymbol{Z}, y - z \in \boldsymbol{Z}$. Ул вакытта $x - z = (x - y) + (y - z) \in \boldsymbol{Z}$, ягъни $(x, z) \in R$. Бу — транзитивлык шарты.

R — бәйле бәйләнеш түгел, чөнки аермалары бөтен сан булмаган чиксез күп рациональ саннар бар. Мәсәлән, $1/2 – 1/3 = 1/6 \in \boldsymbol{Z}$, $1/3 – 1/2 = – 1/6 \in\in \boldsymbol{Z}$.

§ 2.3. Эквивалентлык бәйләнеше

Эквивалентлык бәйләнеше бинар бәйләнешләрнең мөһим төре булып тора.

Билгеләмә. *Әгәр A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнеше рефлексив, симметрик һәм транзитив булса, ул эквивалентлык бәйләнеше дип атала.*

Мисаллар

1. A — курстагы студентлар күплеге, R — «бер группада уку» бәйләнеше, ягъни $R = \{(a, b) | a \text{ белән } b \text{ бер группада укый} \}$. a белән a бер группада укыганга күрә, теләсә нинди $a \in A$ өчен $(a, a) \in R$, ягъни R — рефлексив бәйләнеш. Әгәр a белән b бер группада укыса, b белән a бер группада укый, ягъни $(a, b) \in R$ икән, $(b, a) \in R$. Димәк, R — симметрик бәйләнеш. Әгәр a белән b, b белән c бер группада укыса, a белән c бер группада укый. Бу нәтиҗә «әгәр $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ булса, $(a, c) \in R$» дигән сүз. Ягъни R — транзитив бәйләнеш. Димәк, R — эквивалентлык бәйләнеше.

2. R — яссылыктагы турылар күплегендә бирелгән «параллель булу» бәйләнеше булсын. Теләсә нинди a турысы үз-үзенә параллель, ягъни $(a, a) \in$ $\in R$. Өстәвенә, әгәр a турысы b турысына параллель булса, b турысы a турысына параллель, ягъни $(a, b) \in R$ шартыннан $(b, a) \in R$ булуы килеп чыга. Әгәр a турысы b турысына параллель, b турысы c турысына параллель булса, a турысы c турысына параллель. Икенче төрле әйтсәк, $(a, b) \in R,\ (b, c) \in R$ шартларыннан $(a, c) \in R$ икәнлеге килеп чыга. Димәк, R бинар бәйләнеше — рефлексив, симметрик һәм транзитив. Моннан R — эквивалентлык бәйләнеше.

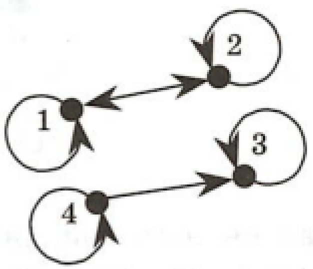
3. $R = \{(a, b) | (a - b) \vdots 3\}$ бәйләнеше $\boldsymbol{Z}$ күплегендә бирелсен. Алда бу бәйләнешнең рефлексив, симметрик һәм транзитив булуы күрсәтелгән иде инде. Димәк, R –эквивалентлык бәйләнеше.

4. $R = \{(x, y) | x^2 = y^2\}$ бәйләнеше $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелсен. Теләсә нинди $x \in \boldsymbol{R}$ өчен $x^2 = x^2$ булганга, бу бәйләнеш — рефлексив. Ул — симметрик, чөнки $x^2 = y^2$ шартыннан $y^2 = x^2$ тигезлеге чыга. Өстәвенә әлеге бәйләнеш — транзитив, чөнки $x^2 = y^2, y^2 = z^2$ шартларыннан $x^2 = z^2$ тигезлеге килеп чыга. Димәк, R — эквивалентлык бәйләнеше.

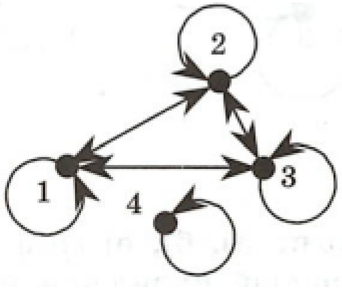
Эквивалентлык бәйләнешләренең симметрик булуыннан $Dom\ R = Im\ R$ икәнлеге күренә.

Чикле күплектә бирелгән эквивалентлык бәйләнешенең графында һәр түбә янында да элмәк була, барлык уклар да ике очлы һәм ике кабыргадан торучы барлык чылбырларның да йомучы кабыргасы була.

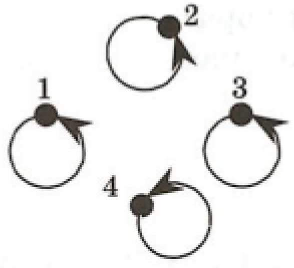
Мәсәлән, $A = \{1; 2; 3; 4\}$ булсын һәм түбәндәге графлар бирелсен:



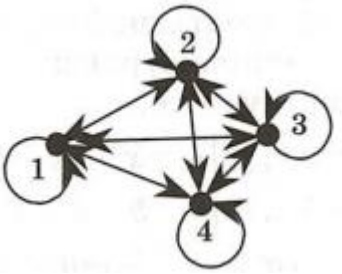
1 нче граф



2 нче граф



3 нче граф



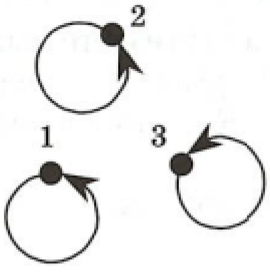
4 нче граф

Бу графларның кайсылары эквивалентлык бәйләнешенеке икәнен тикшерик.

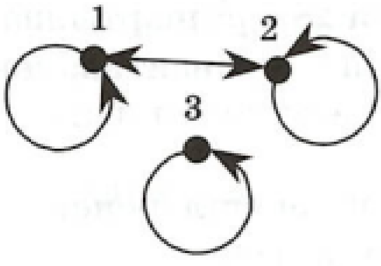
Беренче графның бер очлы (4,3) кабыргасы бар, димәк, ул эквивалентлык бәйләнешенең графы була алмый. Икенче, өченче һәм дүртенче графлар эквивалентлык бәйләнешенең барлык шартларын да канәгатьләндерәләр (моны үзегез тикшерегез!).

Күнегүләр

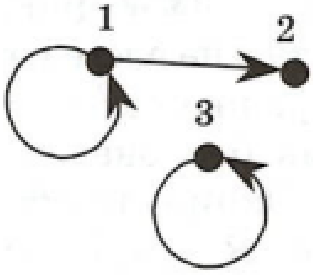
1. Түбәндәге графларның кайсылары эквивалентлык бәйләнешенә була?



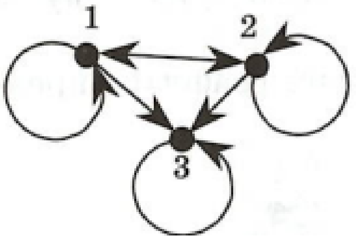
а)



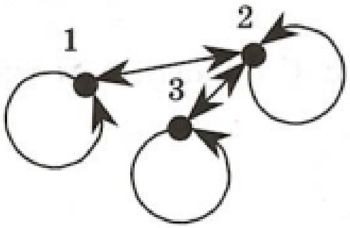
б)



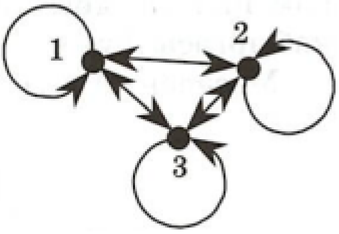
в)



г)



д)



е)

Җавап: а), б), е) графлары эквивалентлык бәйләнешнеке. Моның шулай икәнлеген мөстәкыйль рәвештә тикшерегез.

2. А күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешләренең кайсылары эквивалентлык бәйләнеше булып тора?

а) R — «тигез зурлыкта булу» бәйләнеше, A — яссылыктагы фигуралар күплеге;

б) $R = \{(x, y)|y = x^2\}, A = \boldsymbol{R}$;

в) $R = \{(a, b)|a - b \in \boldsymbol{Z}\}, A = \boldsymbol{Q}$;

г) R — «a һәм b саннарының язылышындагы цифрлар саны бер үк булу» бәйләнеше, $A = \boldsymbol{N}$;

д) $R = \{(x, y)|x \leq y\}, A = \boldsymbol{R}$;

е) R — «(0, 0) ноктасыннан тигез ераклыкта яту» бәйләнеше, A — xOy яссылыгындагы нокталар күплеге.

Җавап: эквивалентлык бәйләнешләре — а), в), г), е). Билгеләмәдәге барлык шартларнын да үтәлүен тикшерегез.

§ 2.4. Эквивалентлык класслары һәм факторкуплек

R бәйләнеше A күплегендә бирелгән эквивалентлык бәйләнеше булсын.

Билгеләмә. *$(a, b) \in R$ булырдай барлык $b \in A$ элементлары күплеге $a \in A$ элементы хасил иткән эквивалентлык классы дип атала.*

Гадәттә, мондый класс $R_а$ дип тамгалана. Шулай итеп, билгеләмә буенча $R_а = \{b | (a, b) \in R\} \subset A$.

Билгеләмә. *Барлык эквивалентлык класслары җыелмасы факторкуплек дип атала һәм A/R дип тамгалана*

§ 2.3 тә китерелгән мисаллар өчен эквивалентлык классларын һәм факторкуплекләрен табыйк.

1. Курстагы студентлар күплегендә «бер группа да уку» бәйләнеше өчен R_a — a белән бер группа да укучы барлык студентлар күплеге. Шулай итеп, студентлар группасының һәрберсе бер эквивалентлык классы булып тора. Эквивалентлык класслары саны курстагы группалар санына тиң булачак. Бу мисалдан күренгәнчә, һәрбер группа да студентлар булганда, бер класс та булу була алмый. Бер үк студент берьюлы ике группа да укый алмый, димәк, әлеге класслар кисешмиләр. Барлык классларның берләшмәсе курстагы студентлар күплеген, ягъни A күплеген бирә. Шул рәвешле, $A \backslash R = \{A_i | A_i -$ студент группалары$\}$.

2. Әгәр R яссылыктагы турылар күплегендә бирелгән «параллель булу» бәйләнеше булса, үзара параллель булган турылар күплекләре (параллель турылар бәйләнеше) эквивалентлык классларын тәшкил итә. Һәрбер класска иң кимендә бер туры керә, ягъни эквивалентлык классы буш түгел; төрле ике классның уртак элементлары юк, ягъни алар кисешми; барлык классларның берләшмәсе яссылыктагы турылар күплеген бирә. Димәк, $A \backslash R = \{$параллель турылар бәйләнемәр$\}$.

3. $\boldsymbol{Z}$ күплегендәге $R = (a, b) | (a - b) \vdots 3\}$ бәйләнеше өчен эквивалентлык классларын табыйк.

$a = 0$ булсын. Ул вакытта $R_0 = \{b | (0 - b) \vdots 3\} = \{3k | k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Әгәр $a = 1$ булса, $R_1 = \{b | (1 - b) \vdots 3\} = \{3k + 1 | k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Әгәр $a = 2$ булса, $R_2 = \{b | (2 - b) \vdots 3\} = \{3k + 2 | k \in \boldsymbol{Z}\}$.

Әгәр $a = 3$ булса, $R_3 = R_0$; әгәр $a = 4$ булса, $R_4 = R_1$ һ. б. Шулай итеп, әгәр $a \in \boldsymbol{N}$ булса, яңа класслар табылмый. $a = -1$ дип алыйк. Ул вакытта $R_{-1} = \{b | (-1 - b) \vdots 3 = \{3k - 1 | k \in \boldsymbol{Z}\} = \{3m+2 | m \in \mathbf{Z}\} = R_2$.

Әгәр $a = -2$ булса, $R_{-2} = \{b| (-2 - b) \vdots 3 = \{3k - 2 | k \in \boldsymbol{Z}\} = \{3m+1 | m \in \mathbf{Z}\} = R_1$. Шул рәвештә, $a = -3$ булганда, $R_{-3} = R_0$ һ.б. табабыз. Димәк, теләсә нинди $a \in \boldsymbol{Z}$ өчен R_a эквивалентлык классы R_0, R_1, R_2 классларының берәрсе белән тәңгәл киләчәк, ягъни бирелгән мисалда бары тик төрле өч эквивалентлык классы гына булачак, өстәвенә алар буш күплек түгел, $R_i \cap R_K = \emptyset$, $i \neq k$, $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = \boldsymbol{Z}$. $\boldsymbol{Z} \backslash R = \{R_0, R_1, R_2\}$.

4. R күплегендә бирелгән $R = \{(x, y) | x^2 = y^2\}$ бәйләнеше эчен $R_a = \{b | a^2 = b^2\} = \{b | b = \pm a\}$. Шулай итеп, $R_a = \{a, -a\}$

$R_0 = \{0\}$, $R_{1/2} = \{b | b = \pm\frac{1}{2}\} = \{+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, $R_2 = \{b | b = \pm 2\} = \{2;-2\}$, $R_{-1/2} = \{+\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\} = R_{1/2}$, $R_{-2} = \{2; -2\} = R_2$ булуын табабыз. Әлеге класслары чиксез күп булачак. Бу классларның берсе дә буш түгел, төрле ике класс кисешми, барлык классларның берләшмәсе R күплеген бирә. $A \backslash R = \{\{a, -a\} | a \in \boldsymbol{R}\}$.

Ә хәзер 2 нче, 3 нче, 4 нче графлар белән бирелгән эквивалентлык бәйләнешләренең эквивалентлык классларын һәм факторкүплекләрен табыйк. Моның өчен беренче координа- талары а булган барлык парларны сайлап алырга кирәк. Ул вакытта аларның икенче координаталарыннан төзелгән күплек R_a булачак.

5. 2 нче граф белән бирелгән бинар бәйләнеш өчен $R_1 = \{1;2;3\}$,

$R_2 = \{1;2;3\}$, $R_3 = \{1;2;3\}$, $R_4 = \{4\}$

Шулай итеп, бу очракта берсенә тәңгәл килмәгән бары ике генә эквивалентлык классы булачак. Әлеге класслар буш түгел, аларның уртак элементлары юк, аларның берләшмәсе А күплеген бирә.

$A \backslash R = \{\{1; 2; 3\}; \{4\}\}$

6. Югарыда әйтелгәннәр буенча, 3 нче граф очрагында: $R_1 = \{1\}$, $R_2 = \{2\}$, $R_3 = \{3\}$, $R_4 = \{4\}$ ягъни дүрт эквивалентлык классы табыла, өстәвенә $R_i \neq \emptyset$, $R_i \cap R_K = \emptyset$, $i \neq k$, $R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 = A$.

$A\backslash R$ ={{1}; {2}; {3}; {4}}.

7. 4 нче граф очрагында R_1= R_2= R_3 = R_4= {1; 2; 3; 4} икәнлеген күрәбез. Димәк, бу очракта бары бер генә эквивалент- лык классы була. Ул класс А күплеге белән тәңгәл килә, ягъни $A\backslash R = \{A\}$.

Эквивалентлык классларының үзлекләре

1) Эквивалентлык классы буш күплек түгел.

Исбатлау. Эквивалентлык бәйләнеше рефлексив булу сәбәпле, һәрбер R_a классына а элементы керә.

2) R_a= $R_a \neq \emptyset$ => $R_a = R_b$

Исбатлау. Ике эквивалентлык классының уртак элементлары булмавын яки аларның тулысынча тәңгәл килүен исбатлыйк. Моның өчен безгә ике эквивалентлык классының бер генә уртак элементы булганда да, алар үзара тигез икәнлеген күрсәтергә кирәк.

Димәк, $c\in R_a$, $c\in R_b$ булса, $R_a = R_b$ икәнен исбатлап була. Башта $R_a \subset R_b$ булуын күрсәтик. Моның өчен х$\in R_a$ элементын алыйк. R_a классының билгеләмәсеннән $(a, x)\in R$ икәнлеге билгеле. R симметрик бәйләнеш булганга, (x, a)$\in R$, $c\in R_a$ булу сәбәпле, (a, c)$\in$ R. Шулай итеп, $(x, a)\in$ R һәм (a, c)$\in R$. R транзитив бәйләнеш булу сәбәпле, (х, c)$\in R$ икәнлеге килеп чыга. Фараз буенча, $c\in R_b$. Бу вакытта R_b классының билгеләмәсе буенча, (b, c)$\in R$, ә R симметрик бәйләнеш булу сәбәпле, $(c, b)\in R$. Димәк, $(x, c)\in R$, $(c, b)\in R$. Моннан, R бәйләнешенең транзитивлыгыннан $(x, b)\in R$, ә аның симметриклыгыннан $(b, x)\in R$ булуын табабыз. Бу $x\in R_b$ икәнлеген аңлата. Димәк, без $R_a\in R_b$ булуын исбат иттек. Әгәр $x\in R_b$ булса, нәкъ югарыда китерелгән фикерләрне кабатлап, х$\in R_a$ икәнлеген күрсәтәбез. Шулай итеп, $R_b\in R_a$ a икәнлеге исбатлана. Моннан R_a=R_b тигезлеге килеп чыга.

3) $\bigcup_a R_a = A$

Исбатлау. Һәр $R_a\in A$ булганлыктан, $\bigcup_a R_{\{a\}} \in A$. Шул ук вакытта теләсә нинди $a\in A$ өчен $a\in R_a$. Шунлыктан, $A \in \bigcup_a R_{\{a\}}$.

Димәк, $A = \bigcup_a R_{\{a\}}$.

Әлеге үзлекләрдән күренгәнчә, әгәр ниндидер А күплегендә эквивалентлык бәйләнеше бирелсә, бу күплек үзара кисешмәүче классларга бүленә.

Моңа бәйле рәвештә мондый билгеләмәне бирә алабыз.

Билгеләмә. А *ниндидер күплек,* A_1, A_2, A_3, ... *аның күплекчәләре булсын. Әгәр*

1) $A_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$;

3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = A$ *булса, А күплеге* A_i, $i = 1, 2, \ldots$ *классларына бүленә диләр. Бу вакытта* A_i *күплекчәсе бүлену классы дип атала.*

Бу билгеләмәдәге шартларны эквивалентлык класслары үзлекләре белән чагыштырсак, аларның тәңгәл килүен күрәбез.

Димәк, *А* күплегендә эквивалентлык бәйләнеше бирелсә, бу күплек классларына бүленә. Бүлену класслары булып эквивалентлык класслары тора.

Кире раслау да дөрес, ягъни әгәр *А* күплеге ниндидер классларга бүленсә, *А* күплегендә эквивалентлык бәйләнеше бар. Шулай итеп, түбәндәге теорема дөрес булачак.

Теорема 2.1

***А* күплегендә эквивалентлык бинар бәйләнеш бирелсә, *А* күплеге классларга бүленә. *А* күплеге классларга бүленсә, *А* күплегендә эквивалентлык бинар бәйләнеше бар.**

Исбатлау. Бу теоремадагы беренче җөмләне дөреслеген югарыда күрсәтеп киттек. Дөрестән дә, *А* күплегендә *R* эквивалентлык бәйләнеше бирелгән булса, *А* күплеге эквивалентлык классларына бүленә.

Теореманың икенче өлешен исбатлауга күчик. *А* күплегенең ирекле классларына бүленүе бирелсен. Бу күплектә *R* бинар бәйләнешен түбәндәге кагыйдә буенча кертик: $R = \{(a, b) \mid a$ һәм b бер үк бүлену классына керә$\}$, a һәм a бер үк бүлену классына кергәнгә, теләсә нинди $a \in A$ өчен $(a, a) \in R$ ягъни R —

рефлексив бәйләнеше, a һәм b элементлары бер үк бүлену классында булсалар, b һәм а элементлары да бер үк бүлену классында була, ягъни $(a, b) \in R$ шартыннан $(b, a) \in R$ килеп чыга. Димәк, R симметрик бәйләнеш. a һәм b элементлары бер бүлену классына, b һәм c элементлары бер бүлену классына керсәләр, a һәм c элементлары да бер үк бүлену классына керәчәк. Моннан $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ шартларыннан $(a, c) \in R$ икәне килеп чыга, ягъни R - транзитив бәйләнеш. Шулай итеп, A күплегендә кертелгән R бинар бәйләнеше эквивалентлык бәйләнеше була. Бу нәтиҗә теореманың икенче өлешенең исбатлануы була, ягъни A күплегенең бүленүе бирелсә, бу күплектә эквивалентлык бәйләнеше була.

Шулай итеп, теорема тулысынча исбатланды.

Әлеге теоремадан факторкүплекнең бүлену класслары җыелмасы икәнен күрәбез.

Эквивалентлык бәйләнеше һәрвакытта да күплекнең ниндидер классларга бүленүен бирә, шуңа күрә бу бәйләнеш зур роль уйный. Моның шулай икәнлеген кайбер мисаллар өстендә ачыклыйк. Ниндидер элементлар күплеген өйрәнү өчен, математик теория төзегәндә ике элементның үзара тигез булу төшенчәсен кертергә кирәк. Тигез булу бәйләнеше эквивалентлык бәйләнеше булып тора. Шуңа күрә, исбатланган теорема буенча, тигез булу бәйләнеше күплекнең классларга бүленүен бирә. Үзара тигез булган барлык элементлар бер класска керәчәк, ягъни, әлеге бәйләнеш күзлегеннән чыгып караганда, алар бер-берсеннән аерылгысыз булачак. Аерым элементларның үзлекләрен өйрәнгәндә, шушы элемент кергән эквивалентлык классыннан теләсә нинди бер элемент алу җитәчәк. Мәсәлән, әгәр A өчпочмаклар күплеге булса, тигезлек бәйләнешенең бер эквивалентлык классына берсе өстенә икенчесен салганда тәңгәл килә торган барлык өчпочмаклар керәчәк, һәр класска кергән өчпочмакларның үзлекләрен өйрәнү өчен, бу класстан бер өчпочмак сайлап алу җитә.

Күплекләр теориясендә бирелгән тигез булу бәйләнеше шулай ук эквивалентлык бәйләнеше була, чөнки A һәм A күплекләре бер үк элементлардан тора; әгәр A һәм B күплекләре бер үк элементлардан торса, B һәм A күплекләре дә бер үк элементлардан тора; әгәр A һәм B, B һәм C күплекләре бер үк элементлардан торса, A һәм C күплекләре дә бер үк элементлардан тора. Шуңа күрә барлык күплекләр җыелмасы үзара тигез күплекләрдән торган классларга бүленә. Күплекләрне өйрәнгәндә, без элементларның урнашу тәртибенә, аларның язылу ысулына игътибар итмибез.

Мәсәлән, әгәр $A = \{2; 3\}$, $B= \{3; 2\}$, $C= \{x \mid (x - 2)\,(x - 3) = 0\}$, $D = \{n, m \mid n, m \in N, n + m = 5, nm = 6\}$ булса, ул вакытта $A = B = C = D$. Бу күплекләр бер эквивалентлык классына керәләр. Шуңа күрә күплекләрне өйрәнгәндә, аларның берсен алу җитә.

$\boldsymbol{Q}$ күплегендә бирелгән тигез булу (эквивалентлык) бәйләнеше аны бер-берсенә тигез булган саннардан торучы классларга бүлә. Мәсәлән, бер класска $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$ һ. б. шундый саннар керәчәк, ә икенчесенә 2, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$ һ. б. Шуңа күрә рациональ саннарның үзлекләрен өйрәнү өчен, һәрбер класстан берәр элемент сайлап алырга кирәк, ә класстагы калган элементлар бу класстан алынган элементның башка төрле тамгаланышы булып саналачак.

Математикага яңа билгеләмәләр керткәндә күплекне бүлү уңышлы кулланыла. Мәсәлән, яссылыктагы турылар күплегендә бирелгән «параллель булу» бәйләнеше эквивалентлык бәйләнеше булып тора. Һәрбер эквивалентлык классы параллель турылар бәйләменнән тора һәм юнәлешне билгели. Моннан, һәр класстан бер туры алып, бу турылар җыелмасын бер нокта аша үтүче турылар күплеге, ягъни кисешүче турылар бәйләме итеп карарга мөмкин.

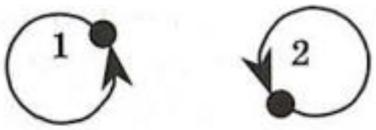
Өчпочмаклар күплегендә бирелгән «охшашлык» бәйләнеше шулай ук эквивалентлык бәйләнеше булып тора, һәм әлеге бәйләнешкә күплекне үзара охшаш өчпочмаклардан торган классларга бүлү туры килә. Шулай итеп, өчпочмакның формасы — ул «охшашлык» бәйләнеше белән бәйле эквивалентлык классы, дип әйтергә мөмкин.

Күнегүләр

1. Ике элементтан һәм өч элементтан торучы күплекләрнең барлык бүленүләрен табыгыз. Төзелгән бүленүгә туры килүче эквивалентлык бәйләнешенең элементларын язып чыгыгыз һәм графын төзегез.

а) $A = \{1; 2\}$ булсын. Монда ике төрле бүленү мөмкин. Беренчесендә бүленү класслары булып A күплеге үзе тора, ягъни $A = A$. Икенчесендә бүленү класслары $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$ була, бу очракта $A = A_1 \cup A_2$. Теорема 2.1 дә күрсәтелү буенча бүленүгә тиңдәш эквивалентлык бәйләнеше $R = \{(a, b) \mid a, b$ элементлары бер үк бүленү классына керә$\}$ була. Шуңа күрә беренче бүленү өчен эквивалентлык бәйләнеше — $H_1 = \{(1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2)\}$, ә икенче бүленү өчен — $H_2 = \{(1; 1), (2; 2)\}$. Аларның графлары түбәндәгечә күрсәтелә:

H_1 бәйләнеше



H_2 бәйләнеше

б) $A = \{1; 2; 3\}$ булсын. $A = A$ һәм $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, биредә $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$. Өстәвенә $A = \{1\} \cup \{2, 3\}$, $A = \{2\} \cup \{1, 3\}$, $A = \{3\} \cup \{1,2\}$. Шулай итеп, бу очракта биш бүленү килеп чыга. Беренче бүленү өчен эквивалентлык бәйләнеше: $H_1 = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1), (2; 3), (3; 2)\}$,

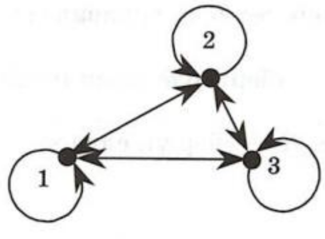
икенчесе өчен — $H_2 = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$,

өченчесе өчен — $H_3 = \{(2; 2), (1; 1), (3; 3), (2; 3), (3; 2)\}$,

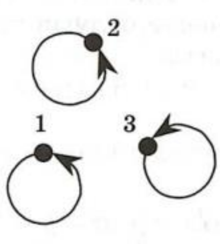
дүртенчесе өчен — $H_4 = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (1; 3), (3; 1)\}$,

бишенчесе өчен — $H_5 = \{(3; 3), (1; 1), (2; 2), (1; 2), (2; 1)\}$. Аларның графлары түбәндәгечә була:

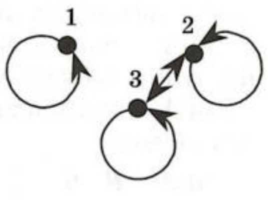
Бу графлардан күренгәнчә, үзара уклар белән тоташтырылган элементлар бер бүленү классына керәләр.



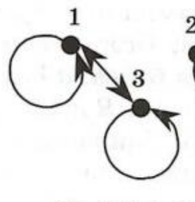
H_1 бәйләнеше



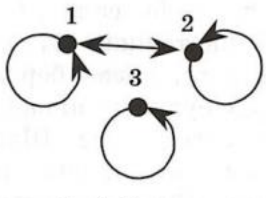
H_2 бәйләнеше



H_3 бәйләнеше



H_4 бәйләнеше



H_5 бәйләнеше

2. A_i кече күплекләренең $\boldsymbol{N}$ күплегенең бүленү класслары булып торуын тикшерегез һәм бирелгән бүленүгә туры килүче эквивалентлык бәйләнешләрен табыгыз.

а) A_1 — так натураль саннар күплеге. A_2 — җөп натураль саннар күплеге.

б) A_0 — 3 санына бүленүче натураль саннар күплеге, A_1 — 3 санына бүлгәндә калдыклары 1 гә тигез булган натураль саннар күплеге, A_2 — 3 санына бүлгәндә калдыклары 2 гә тигез булган натураль саннар күплеге.

в) A_n — n-урынлы натураль саннар күплеге, $n = 1; 2; 3; \ldots$.

Чишү. а) $\boldsymbol{N} = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. Моннан күренгәнчә, A_1 һәм A_2 бүленү класслары булып торалар. $\boldsymbol{N}$ күплегендәге бу бүленүгә тиңдәш булган эквивалентлык бәйләнеше түбәндәгечә күрсәтеләчәк: $R = \{(a, b) \mid a, b$ саннары бер бүленү классына керә$\} = \{(a, b) \mid a, b$ саннары так яки a, b саннары җөп$\}$.

б) $\boldsymbol{N} = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, $A_i \cap A_k = \varnothing$, $i \neq k$. $R = \{(a, b) \mid a$ һәм b саннары 3 кә бүленгәндә бер үк калдыкка ия$\}$.

в) $\boldsymbol{N} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, $i \neq k$ булганда, $A_i \cap A_k = \varnothing$. $R = \{(a, b) \mid a$ һәм b саннарының язылышында цифрлар саны бер үк$\}$.

3. A күплегендә R бәйләнеше бирелгән. Бу бәйләнешнең эквивалентлык бәйләнеше булуын тикшерегез һәм эквивалентлык класларын табыгыз.

а) A — шәһәрдәге кешеләр күплеге, R — «бертөрле фамилиягә ия булу» бәйләнеше.

б) A — группадагы студентлар күплеге, R — «бер үк елда туу» бәйләнеше.

в) $A = \mathbf{R}$. $R = \{(x,y) \mid x = y$ яки $y = \frac{1}{x}\}$.

Чишү, а) Теләсә нинди $a \in A$ өчен a һәм a бертөрле фамилиягә ия, ягъни теләсә нинди $a \in A$ өчен $(a, a) \in R$. a һәм b бер үк фамилияле булсалар, b һәм a бер үк фамилияле була, ягъни $(a, b) \in R$ шартыннан $(b, a) \in R$ килеп чыга. Әгәр a һәм b — бер үк фамилиягә, b һәм c бер үк фамилиягә ия булса, a һәм c бер үк фамилияле булалар, ягъни $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ шартларыннан $(a, c) \in R$ килеп чыга. Шулай итеп, без R бәйләнешенең рефлексив, симметрик һәм транзитив булуын, ягъни аның экви-валентлык бәйләнеше икәнлеген күрсәттек.

Эквивалентлык классларын табыйк. Билгеләмә буенча, $R_a = \{b|$ a һәм b бер үк фамилиягә ия$\}$. Шуңа күрә һәрбер эквивалентлык классы фамилияләре бер үк булган кешеләрдән тора. Шулай итеп, шәһәрдәге кешеләр бер үк фамилиягә ия булган кешеләр кергән классларга бүленә.

б) R — эквивалентлык бәйләнеше (моны тикшерегез!). Бу мисалда $R_a = \{b|$ a һәм b бер үк елда туганнар$\}$. Моннан һәрбер эквивалентлык классына бер елда туган студентлар керәчәк. Бу очракта студентлар группасы бер яшьтәге студентлардан төзелгән классларга бүленә.

в) Элек күрсәтеп киткәнчә, бу бәйләнеш — рефлексив, симметрик һәм транзитив. Димәк, R — эквивалентлык бәйләнеше. $R_a=\{(b|$ $b = a$ яки $b=\frac{1}{a}$ $\}$.булганга, һәр эквивалентлык классы үзара кире булган ике саннан торачак. 0 һәм 1 ярдәмендә хасил булган классларда гына берәр сан булачак. Мәсәлән, $R_0 = \{0\}$, $R_1 = \{1\}$, $R_2 = \left\{2, \frac{1}{2}\right\}$, $R_{\frac{1}{2}} = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$, $R_2 = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$ һ. б. Шулай итеп, бу очракта эквивалентлык класслар саны чиксез күп булачак.

§ 2.5. Тәртип бәйләнеше

Билгеләмә. *Әгәр A күплегендә бирелгән R бинар бәйләнеше транзитив һәм антисимметрик булса, бу бәйләнеш тәртип бәйләнеше дип атала.*

Билгеләмә. *Әгәр тәртип бинар бәйләнеше рефлексив булса, ул катгый булмаган тәртип бәйләнеше дип атала.*

Шулай итеп, катгый булмаган тәртип бәйләнеше — транзитив, антисимметрик һәм рефлексив булган бинар бәйләнеш.

Билгеләмә. *Әгәр тәртип бәйләнеше антирефлексив булса, ул катгый тәртип бәйләнеше дип атала.*

Моннан катгый тәртип бәйләнеше — транзитив, антисимметрик һәм антирефлексив булган бинар бәйләнеш.

Билгеләмә. *Әгәр тәртип бәйләнеше бәйле бәйләнеш булса, ул сызыкча тәртип бәйләнеше дип атала.*

Шулай итеп, сызыкча тәртип бәйләнеше — транзитив, антисимметрик һәм бәйле бинар бәйләнеш.

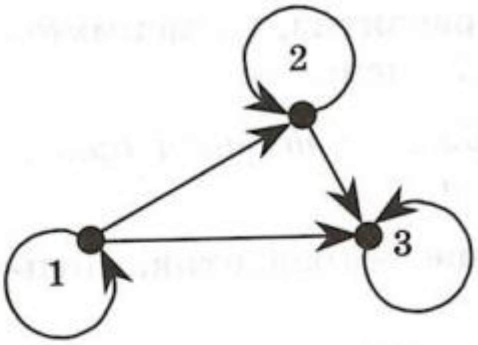
Рефлексивлык һәм антирефлексивлык шартларының үтәлү- үтәлмәвенә карап, сызыкча тәртип бәйләнеше ике төргә — сызыкча катгый булмаган һәм сызыкча катгый тәртип бәйләнешләренә аерыла.

Мәсәлән, $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ бинар бәйләнеше антисимметрик, чөнки $x < y$ шартыннан $y < x$ килеп чыга алмый. Ул — транзитив, чөнки $x < y$, $y < z$ шартларыннан $x < z$ булуы килеп чыга. R — антирефлексив, чөнки теләсә нинди $x \in \boldsymbol{R}$ өчен $x \not< x$. Өстәвенә, әгәр $x \neq y$ булса, $x < y$ яки $y < x$, ягъни бирелгән бинар бәйләнеш R — бәйле бәйләнеш. Шулай итеп, $\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ бәйләнеше сызыкча катгый тәртип бәйләнеше булып тора.

$\boldsymbol{R}$ күплегендә бирелгән $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$бинар бәйләнеше — антисимметрик, транзитив һәм рефлексив. Моннан R — катгый булмаган тәртип бәйләнеше. Теләсә нинди $x, y \in \boldsymbol{R}$ өчен $x \leq y$ яки $y \leq x$ булганга, R — бәйле бәйләнеш. Димәк, $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ бинар бәйләнеше $\boldsymbol{R}$ күплегендә сызыкча катгый булмаган тәртип бәйләнеше булып тора.

$\boldsymbol{N}$ күплегендә бирелгән $R = \{(x, y) \mid x \vdots y\}$ бинар бәйләнешен карыйк. Теләсә нинди $x \in \boldsymbol{N}$ өчен $x \vdots x$, ягъни R — рефлексив. $x \vdots y$ $(x \neq y)$ шартыннан $y \vdots x$ икәнлеге килеп чыкмый, ягъни R — антисимметрик. Ләкин $x \vdots y$ һәм $y \vdots z$ шартларыннан $x \vdots z$ булуы килеп чыга, ягъни R — транзитив. Димәк, $R = \{(x,y)|x \vdots y)$ бинар бәйләнеше $\boldsymbol{N}$ күплегендә катгый булмаган тәртип бәйләнеше. Ул сызыкча тәртип бәйләнеше булмаячак, чөнки, мәсәлән, $3 \neq 2$, 3 саны 2 гә бүленми, 2 саны 3 кә бүленми, ягъни бәйле булу шарты үтәлми.

Әгәр A күплеге чикле булса һәм бу күплектә R бинар бәйләнеше бирелсә, аның тәртип бәйләнеше буламы, юкмы икәнлеген графлар ярдәмендә тикшерергә мөмкин. Мәсәлән, $A = \{1; 2; 3\}$, $R = \{(1; 2), (1; 1), (2; 3), (1; 3), (2; 2), (3; 3)\}$. Бу бәйләнешнең графы түбәндәге рәвештә була (рәс. 2.10).



Рәс. 2.10

Барлык уклар да бер очлы булганга, R — антисимметрик бәйләнеш. $1 \rightarrow 2$ һәм $2 \rightarrow 3$ уклары белән беррәттән $1 \rightarrow 3$ угы да бар. Бу күренеш транзитивлыкны аңлата. Һәр түбә янында да элмәк бар, димәк, R — рефлексив бәйләнеш. Теләсә нинди ике ноктаның үзара уклар белән тоташтырылуыннан бирелгән бәйләнешнең бәйле булуы килеп чыга. Шулай итеп, R — сызыкча катгый булмаган тәртип бәйләнеше.

Билгеләмә. *Әгәр A күплегендә тәртип бәйләнеше бирелгән булса, A тәртипләштерелгән күплек дип атала.*

Мисал өчен, $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ күплекләрендә «<» (яисә «≤», «>», «≥») бәйләнеше бирелсә, алар тәртипләштерелгән күплеккә әвереләләр.

Күнегүләр

1. $A = \{1;2;3;4\}$ күплегендә бирелгән бинар бәйләнешләрнең тәртип бәйләнешләре булу-булмавын графлар ярдәмендә тикшерегез. Тәртип бәйләнеше өчен аның төрен ачыклагыз.

а)$H_1 = \{(1;2),(1;4),(2;4),(1;3),(3;4)\}$;

б)$H_2 = \{(1;1),(1;2),(2;2),(4;2),(4;3),(3;3),(4;4)\}$;

в)$H_3 = \{(1;2),(2;3),(2;4),(3;4)\}$;

г)$H_4 = \{(1;2),(2;3),(2;4),(4;2),(4;3)\}$;

д)$H_5 = \{(2;1),(2;3),(3;1),(4;1),(4;2),(4;3)\}$.

Чишү.

а) H_1 бәйләнешенең графы түбәндәге рәвештә була (рәс. 2.11).

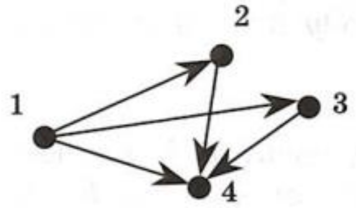
Монда барлык уклар да бер очлы, димәк, H_1 - антисимметрик бәйләнеш. Транзитивлыкны тикшерү өчен, уклар кергән һәм уклар чыккан түбәләрне табабыз. Әлеге мисалда шундый ике түбә бар: 2 һәм 3. Ике кабыргадан торучы чылбырларны карыйк: 1 → 2 → 4, 1 → 3 → 4. Графтан күренгәнчә, бу чылбырларның һәркайсы 1 → 4 йомучы кабыргага ия. Моннан H_1 - транзитив бәйләнеш икәнен күрәбез.

Шулай итеп, H_1 тәртип бәйләнеше була. Аның төрен ачыклыйк. Графта бер элмәк тә юк. Бу H_1 бәйләнешенең антирефлексивлыгын аңлата. Димәк, H_1 - катгый тәртип бәйләнеше. H_1 - бәйле бәйләнеш түгел (чөнки уклар белән тоташтырылмаган түбәләр бар). Шуңа күрә H_1 сызыкча тәртип бәйләнеше була алмый.

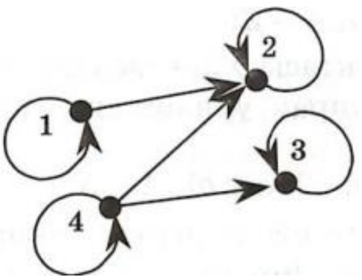
б) H_2 бәйләнешенең графы 2.12 рәсемендә күрсәтелгән.

Бу бәйләнеш – антисимметрик (барлык уклар бер очлы), транзитив (ике кабыргадан төзелгән чылбырлар юк), рефлексив (һәр түбә янында элмәк бар), бәйле түгел (уклар белән тоташтырылмаган түбәләр бар). Димәк, H_2 - катгый булмаган тәртип бәйләнеше, ул сызыкча түгел.

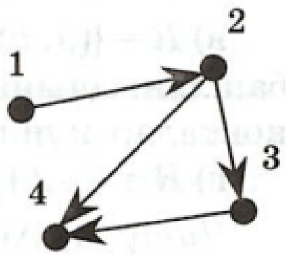
в) H_3 бәйләнешең графын төзик (рәс. 2.13).



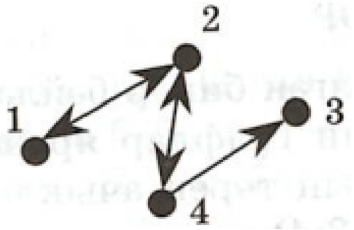
Рәс. 2.11



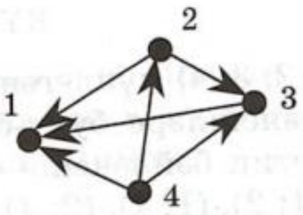
Рәс. 2.12



Рәс. 2.13



Рәс. 2.14



Рәс. 2.15

Бу бәйләнеш – антисимметрик, чөнки барлык уклар да бер очлы. Ике кабыргадан төзелгән чылбыр карыйк:

1 → 2 → 4, 1 → 2 → 3, 2 → 3 → 4.

Соңгы чылбырның 2 → 4 йомучы кабыргасы бар, ә алдагы икесе өчен андый кабыргалар юк. Бу күренеш бирелгән бинар бәйдәнешнең транзитив түгеллеген аңлата. Димәк, H_3 тәртип бәйләнеше була алмый.

г) H_4 бәйләнешенең графы 2.14 рәсемендә күрсәтелгән.

Анда ике очлы ук бар. Димәк, H_4 антисимметрик бәйләнеш түгел. Моннан, ул тәртип бәйләнеше булмый.

д) H_5 бәйләнешенең графыннан (рәс. 2.15) аның антисимметрик бәйләнеш икәнен күрәбез. Транзитивлыкны тикшерик. Ике кабыргадан төзелгән барлык чылбырларны табыйк:

4 → 2 → 1, 4 → 2 → 3, 2 → 3 → 1, 4 → 3 → 1.

Графтан күренгәнчә, барлык бу чылбырлар өчен йомучы кабыргалар бар: 4 → 1, 4 → 3, 2 → 1, 4 → 1. Димәк, H_5 - транзитив бәйләнеш. Моннан H_5 тәртип бәйләнеше була. H_5 антирефлексив (бер элмәк тә юк) һәм бәйле бәйләнеш (барлык нокталар да узара тоташтырылган) булганга, ул сызыкча катгый тәртип бәйләнеше булып тора.

2. А күплегендә бирелгән R бинар бәйләнешләренең кайсылары тәртип бәйләнеше булып тора? Тәртип бәйләнеше өчен аның төрен ачыклагыз.

а) $R = \{(a, b) \mid b \vdots a \text{ яки } a < b\}, A = \mathbf{N}$;

б) $R = \{(a, b) \mid a \vdots b\}, A = \mathbf{Z}$;

в) $R = \{(a, b) | a$ ноктасы b ноктасына караганда координаталар башлангычына якынрак урнашкан$\}$, A – xOy яссылыгындагы нокталар күплеге;

г) $R = \{(a, b) \mid (a - b) \vdots 2, a \geq b\}, A = \mathbf{N}$;

Чишү. а) Антисимметриклыкны тикшерү өчен, $(a, b) \in R \text{ һәм } (b, a) \in R$ дип укыйк. Димәк, $\{b \vdots a \text{ яки } a < b\} \text{ һәм } \{a \vdots b \text{ яки } b < a\}$ дип фараз итәбез.

Мөмкин булган очракларны карыйк:

1) $b \vdots a \text{ һәм } a \vdots b$. Ул вакытта натураль саннар өчен $a = b$ була.

2) $b \vdots a \text{ һәм } b < a$. Әлеге шартлар икесе берьюлы утәлә алмый.

3) $a < b \text{ һәм } a \vdots b$. Бу шартлар шулай ук утәлә алмый.

4) $a < b \text{ һәм } b < a$. Әлеге ике шарт бер-берсенә каршы килә. Димәк, бу очрак та була алмый.

Шулай итеп, безнең фараздан $a = b$ дигән нәтиҗәгә киләбез. Ягъни, әгәр $(a, b) \in R$ һәм $(b, a) \in R$ булса, $a = b$ була. Димәк, R – антисимметрик бәйләнеш.

Транзитивлыкны тикшерик. $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ дип фараз итик. $\{b \vdots a \text{ яки } a < b\}$ һәм $\{c \vdots b \text{ яки } b < c\}$ булу сәбәпле, биредә түбәндәге очракларны карарга кирәк:

1) $c \vdots b, b \vdots a$. Ул вакытта $c \vdots a$.

2) $b \vdots a, b < c$. Бу вакытта $a \leq b$ һәм $b < c$. Моннан $a < c$ булуы күренә.

3) $a < b, c \vdots b$. *Бу* $a < b, b \leq c$ икәнлеген аңлата. Моннан $a < c$ икәнлеген күрәбез.

4) $a < b, b < c$. Моннан $a < c$ булуы килеп чыга.

Шулай итеп, $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ булса, $\{c \vdots a \text{ яки } a < c\}$, ягъни $(a, c) \in R$ шарты үтәлә. Димәк, R – транзитив бәйләнеш.

Теләсә нинди

$a \in N$ өчен $a \vdots a$. Бу нәтиҗә бирелгән бәйләнешнең рефлексив булуын аңлата.

Өстәвенә теләсә нинди натураль a, b $(a \neq b)$ саннары өчен $a < b$, яки $b < a$. Моннан $(a, b) \in R$ яки $(b, a) \in R$, ягъни R – бәйле бәйләнеш. Югарыда әйтелгәннәрне искә алып, нәтиҗә ясый алабыз: R – сызыкча катгый булмаган тәртип бәйләнеше.

б) Бирелгән бәйләнешнең антисимметриклыгын тикшерик. $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$, ягъни $a \,\vdots\, b$, $b \,\vdots\, a$ булсын. Моннан $a = bq$, $b = at$. Ул вакытта $a = atq$ тигезлегеннән $tq = 1$ икәнлеген табабыз. Бу тигезлек $t = q = 1$ һәм $t = q = -1$ булган очракта гына мөмкин. Шулай итеп, $a = b$ яки $a = -b$ дигән нәтиҗәгә киләбез, ягъни антисимметриклык шарты үтәлми. Димәк, R тәртип бәйләнеше булып тормый.

в) Әгәр a ноктасы b ноктасына караганда координаталар башлангычына якынрак урнашса, b ноктасы a ноктасына караганда координаталар башлангычына якынрак урнаша алмый. Ягъни $(a, b) \in R$ булса, $(b, a) \notin R$. Димәк, R – антисимметрик бәйләнеш.

Әгәр a ноктасы b ноктасына караганда, ә b ноктасы c ноктасына караганда координаталар башлангычына якынрак урнашса, a ноктасы c ноктасына караганда координаталар башлангычына якынрак урнаша. Ягъни, $(a, b) \in R$ һәм $(b, c) \in R$ булса, $(a, c) \in R$, моннан R – транзитив бәйләнеш. Димәк, R – тәртип бәйләнеше. Аның төрен ачыклыйк. Теләсә нинди a ноктасы координаталар башлангычына a ноктасына караганда якынрак урнаша алмый, ягъни $(a, a) \notin R$. Димәк, R – антирефлексив бәйләнеш. Координаталар башлангычыннан тигез ераклыкта ятучы a, b $(a \neq b)$ нокталары өчен $(a, b) \notin R$ һәм $(b, a) \notin R$, ягъни R бәйле бәйләнеш түгел. Димәк, R – катгый тәртип бәйләнеше, ул сызыкча түгел.

г) Әгәр $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R$ булса, $a \geq b$ һәм $b \geq a$. Моннан $a = b$ була. Бу нәтиҗә R бәйләнешенең антисимметрик икәнлеген аңлата. $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ булсын, ягъни $(a - b) \,\vdots\, 2$, $a \geq b$, $(b - c) \,\vdots\, 2$, $b \geq c$. Бу вакытта $a - c = (a - b) + (b - c)$ саны 2 гә бүленә, өстәвенә $a \geq c$. Димәк, $(a, c) \in R$. Шулай итеп, R – транзитив бәйләнеш. Теләсә нинди $a \in \mathbf{N}$ өчен $(a - a) = 0 \,\vdots\, 2$, $a \geq a$, ягъни $(a, a) \in R$. Димәк, R бәйләнеше – рефлексив. Бирелгән бәйләнеш бәйле була алмый, чөнки, мәсәлән, $(5;4) \notin R$ һәм $(4;5) \notin R$. Моннан R – катгый булмаган тәртип бәйләнеше, ул сызыкча түгел.

3 нче бүлек

АРИФМЕТИК ВЕКТОРЛАР ПРОСТРАНСТВОСЫ

§ 3.1. n-үлчәмле арифметик векторлар һәм алар белән гамәлләр

Билгеләмә. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *саннарыннан төзелгән тәртипләштерелгән күплек* n*-үлчәмле арифметик вектор дип атала һәм, гадәттә,*

ул $a ==\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *рәвешендә язылa.*

Биредә $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ саннары a векторының *координаталары*, n саны аның *үлчәме* дип атала.

Без өйрәнәчәк теориядә $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ саннары реаль саннар булыр, ягъни n-үлчәмле реаль арифметик векторлар белән эш итәрбез. Башкаларын тикшереп тормыйбыз, шуңа күрә реаль һәм n-үлчәмле векторлар төшереп калдырылды.

Мисаллар

$a_1 = (2;\ 5), a_2 = (-4;\ 3), a_3 = (\alpha_1;\ \alpha_2)$ — ике үлчәмле арифметик векторлар. $2, 5$ саннары a_1 векторының координаталары, $-4, 3$ саннары a_2 векторының координаталары, α_1, α_2 саннары a_3 векторының координаталары.

$b_1 = (2;\ 8;\ -3), b_2 = (-2;\ 3;\ 1), b_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — өч үлчәмле арифметик векторлар.

$2, -2,\ \beta_1$— b_1, b_2, b_3 векторларының – беренче, $8, 3, \beta_2$ — икенче, $-3, 1, \beta_3$ өченче координаталары.

$c_1 = (-5;\ -2;\ 1;\ 0), c_2 = (4;\ 0;\ -2;\ 3)$ — дүрт үлчәмле арифметик векторлар һәм аларның һәрберсендә дүртәр координата.

1.7. параграфында -күплекнең туры тапкырчыгышын билгеләргә мөмкин булуы әйтелгән иде.

Мәсәлән, туры тапкырчыгышның билгеләмәсеннән

$\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R} = \{(a, b, c) |\ a, b, c\ \in \boldsymbol{R}\}$ була, ягъни $\boldsymbol{R}^3$ күплегенең элементлары булып өч үлчәмле арифметик векторлар тора. Шушы ук рәвештә дүрт үлчәмле арифметик векторны

$\boldsymbol{R}^4 == \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ күплегенең элементы итеп карарга була.

Алда әйтелгәннәрне гомумиләштереп, ирекле n-үлчәмле арифметик векторны $\boldsymbol{R}^{\mathrm{n}}$ күплегенең элементы дип әйтергә була.

Моннан n-үлчәмле арифметик векторга икенче билгеләмә биреп була.

Билгеләмә. *$\boldsymbol{R}^{\mathrm{n}}$ күплегенең теләсә нинди элементы n-үлчәмле арифметик вектор дип атала.*

Билгеләмә. *Ике n-үлчәмле арифметик векторның тиңдәшле координаталары тигез булса, аларны бер-берсенә тигез векторлар дип атала.*

Ягъни, әгәр $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mathrm{n}})$ һәм $a = b$ булса, $\alpha_{\mathrm{i}} = \beta_{\mathrm{i}}$ була. Биредә $i = 1, 2, \dots, n$.

Ике арифметик a һәм b векторларын кушарга мөмкин.

Билгеләмә. $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_{\mathrm{n}})$ *векторы* $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *һәм* $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mathrm{n}})$ *векторларның суммасы дип атала.*

Мисал

$$a = (1;\ 2;\ 1), b = (-1;\ 3;\ 4),$$

$$a + b = (1;\ 2;\ 1)\ +\ (-1;\ 3;\ 4)\ = (1 +\ (-1);\ 2 + 3;\ 1 + 4) = (0;\ 5;\ 5).$$

Теләсә нинди n-үлчәмле арифметик векторны λ реаль санына тапкырларга мөмкин.

Билгеләмә. $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$ *векторы* $a\ = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *векторының λ реаль санына тапкырчыгышы дип атала.*

Билгеләмә. *Векторларны кушу һәм векторны санга тапкырлау гамәлләре бирелгән $\boldsymbol{R}^{\mathrm{n}}$ күплеге n-үлчәмле арифметик векторлар пространствосы дип атала.*

Билгеләмә. *Барлык координаталары да нульгә тигез булган вектор нуль-вектор дип атала һәм, гадəттә, θ хәрефе белән тамгалана.*

Димәк, $\theta = (0;\ 0;\ \dots;\ 0)$. Сан белән бутау куркынычы булмаган вакытта θ урынына 0 дип язарга да ярый.

Билгеләмә. $(-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n)$ *векторы* $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ *векторына капма-каршы вектор дип атала һәм* $(-a)$ *дип тамгалана.*

Димәк, $-a = (-\alpha_1;\ -\alpha_2;\ \dots;\ -\alpha_n)$.

Билгеләмә. $a\ +\ (-b)$ *векторы* a *һәм* b *векторларының аермасы дип* *атала һәм* $a - b$ *дип тамгалана.*

Димәк, $a - b = a + (-b)$.

Теләсә нинди $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \boldsymbol{R}^n$ өчен $a - b = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n) \in \boldsymbol{R}^n$. Шуңа курә, $\boldsymbol{R}^n$ пространствосында векторларны кушу һәм векторны санга тапкырлаудан тыш, векторларны алу гамәле дә билгеләнелгән.

Билгеләмә. $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n$ *векторы* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *векторларының сызыкча комбинациясе дип атала.*

Биредә $a_1, a_2, \dots, a_n \in \boldsymbol{R}^n$, ә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ реаль саннары бу сызыкча комбинациянең коэффициентлары була.

Мәсәлән, әгәр $a_1 = (1;\ 2;\ 0;\ -1), a_2 = (2;\ -1;\ 1;\ 2)$ булса,

$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2(1;\ 2;\ 0;\ -1) + (2;\ -1;\ 1;\ 2) = (4;\ 3;\ 1;\ 0)$

векторы a_1 һәм a_2 векторларының сызыкча комбинациясе була.

Билгеләмә. $a_1, a_2, \dots, a_n$ *векторлар системасының барлык векторларының сызыкча комбинацияләре күплеге бу системаның сызыкча тышчасы дип атала һәм* $L(a_1, a_2, \dots, a_n)$ *дип тамгалана.*

Шулай итеп, $L(a_1, a_2, \dots, a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n \,|\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}\}$.

1. Арифметик векторлар белән гамәлләрнең үзлекләре

Арифметик векторларны кушу гамәле түбәндәге үзлекләргә ия:

1. Векторларны кушу коммутатив була, ягъни $a + b = b + a$. Дөрестән дә, әгәр $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ булса, $a + b =$
$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$, $b + a = (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2, \dots, \beta_n + \alpha_n)$ була.

Реаль саннар өчен $\alpha_i + \beta_i = \beta_i + \alpha_i$, биредә $i = 1, 2, \dots, n$.

Димәк, $a + b, b + a$ векторларының тиңдәшле координаталары бер-берсенә тигез. Моннан $a + b = b + a$ дигән нәтиҗәгә киләбез.

2. Векторларны кушу ассоциатив була, ягъни

$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Бу узлек реаль саннарны кушу ассоциативлыгыннан чыга:

$$(a + b) + c = \big((\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)\big) + (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) + (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) =$$

$$= ((\alpha_1 + \beta_1) + \gamma_1, (\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2, \dots, (\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n) =$$

$$= \big(\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2), \dots, \alpha_n + (\beta_n + \gamma_n)\big) =$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + \big((\beta_1 + \gamma_1), (\beta_2 + \gamma_2), \dots, (\beta_n + \gamma_n)\big) =$$

$$= a + (b + c).$$

Биредә $(\alpha_i + \beta_i) + \gamma_i = \alpha_i + (\beta_i + \gamma_i), i = 1, 2, \dots, n$ тигезлекләре искә алынды.

3. $a + \theta = a$.

Дерестән дә, $a + \theta = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) + (0; 0; \dots; 0) =$

$$= (\alpha_1 + 0; \alpha_2 + 0; \dots; \alpha_n + 0) = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) = a.$$

4.Теләсә нинди a векторы өчен $a + b = \theta$ тигезлеге үтәлердәй b векторы бар.

$a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n), b = (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n)$ булсын.

Бу вакытта $a + b = (\alpha_1 + \beta_1; \alpha_2 + \beta_2; \dots; \alpha_n + \beta_n)$.

$a + b = \theta$ булу сәбәпле $\alpha_i + \beta_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Моннан $\beta_i = -\alpha_i$, ягъни $b = (-\alpha_1; -\alpha_2; \dots; -\alpha_n) = -a$ булуы чыга.

3.Арифметик векторны санга тапкырлау узлекләре

1.Теләсә нинди арифметик вектор a өчен $1 \cdot a = a$.

Бу узлекнең дәреслеге векторны санга тапкырлау билгеләмәсеннән чыга.

2.Теләсә нинди a векторы һәм теләсә нинди λ, μ саннары өчен

$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$.

$$(\lambda\mu)a = (\lambda\mu)(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \big((\lambda\mu)\alpha_1, (\lambda\mu)\alpha_2, \dots, (\lambda\mu)\alpha_n\big) =$$

$= (\lambda(\mu\,\alpha_1), \lambda(\mu\,\alpha_2), \dots, \lambda(\mu\,\alpha_n)) = \lambda(\mu\,\alpha_1, \mu\,\alpha_2, \dots, \mu\,\alpha_n) = \lambda(\mu a)$. Биредә $(\lambda\mu)\,a_i = \lambda(\mu\,a_i), i = 1, 2, \dots, n$ тигезлекләре исәпка алынды.

3.Теләсә нинди a, b векторлары һәм теләсә нинди λ саны өчен

$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b.$

Бу узлек векторлар суммасы һәм векторның санга тапкырчыгышы билгеләмәсеннән чыга. Әгәр $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ дип алсак, $\lambda(a + b) = \lambda(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n) = \big(\lambda(\alpha_1 + \beta_1), \lambda(\alpha_2 +$
$+ \beta_2), \dots, \lambda(\alpha_n + \beta_n)\big) = (\lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1, \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_2, \dots, \lambda\alpha_n + \lambda\beta_n) =$
$= (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) + (\lambda\beta_1, \lambda\beta_2, \dots\dots, \lambda\beta_n) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) +$
$+ \lambda(\beta_1, \beta_2, \dots\dots, \beta_n) = \lambda a + \lambda b.$

Аны исбатлаганда, $\lambda(\alpha_i + \beta_i) = \lambda\alpha_i + \lambda\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, тигезлекләре файдаланылды.

4.Теләсә нинди a векторы һәм теләсә нинди λ һәм μ саннары өчен $(\lambda +$
$+ \mu)\, a = \lambda a + \mu a.$

Дөрестән дә, әгәр $a = (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ булса,

$$(\lambda + \mu)a = \big((\lambda + \mu)\alpha_1; (\lambda + \mu)\alpha_2; \dots; (\lambda + \mu)\alpha_n\big) =$$

$= \lambda(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) + \mu(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n) = \lambda a + \mu a$ була.

Күнегүләр

1. $a_1 = (1; 2; 1; 2)$, $a_2 = (-2; 0; 1; 3)$, $a_3 = (-1; -2; 3; 2)$ векторларының күрсәтелгән сызыкча комбинациясен табыгыз.

а) $a_1 - 2a_2 + 2a_3$;

б) $2a_1 - a_2 - 3a_3$.

Чишү. а) Векторларны кушу, алу һәм векторны санга тапкырлау кагыйдәләрен исәпкә алып, $a_1 - 2a_2 + 2a_3 = (1; 2; 1; 2) - (-4; 0; 2; 6) + + (-2; -4; 6; 4) = (3; -2; 5; 0)$ була.

б) Нәкъ шушы рәвештә $2a_1 - a_2 - 3a_3 = (2; 4; 2; 4) - (-2; 0; 1; 3) -$
$- (-3; -6; 9; 6) = (7; 10; -8; -5)$ булуын табабыз.

2. $a_1 = (1; 2; 1; 2)$, $a_2 = (-2; 0; 1; 3)$, $a_3 = (-1; -2; 3; 2)$ һәм

а) $b_1 = a_1 - a_2 + a_3$, $b_2 = 2a_1 - a_2 - a_3$, $b_3 = a_1 + a_2 - a_3$, $b_4 =$
$= -2a_1 - a_2 + 2a_3$.

б) $b_1 = 2a_1 + a_2 - 3a_3,\ \ b_2 = a_1 + a_2 - a_3,\ \ b_3 = -a_1 + 2a_2 -$ $- 3a_3,\ \ b_4 = 3a_1 - a_2 + 2a_3$ булган очракта, $3b_1 - 2b_2 + 3b_3 - b_4$ сызыкча комбинациясен табыгыз.

Чишү. Мондый күнегүләрне ике ысул белән чишәргә мөмкин.

Беренче ысул: алдан b_1, b_2, b_3, b_4 векторларын, аннан соң, беренче күнегүдәге кебек, аларның сызыкча комбинациясен табып була.

Икенче ысул: b_1, b_2, b_3, b_4 векторларыннан төзелгән сызыкча комбинацияне a_1, a_2, a_3 векторларыннан төзелгән сызыкча комбинация рәвешенә китерәбез һәм санауларны a_1, a_2, a_3 векторлары белән башкарабыз.

а) Бу мисалны беренче ысул белән чишик. Шуңа күрә a_1, a_2, a_3 векторларының сызыкча комбинацияләре булган b_1, b_2, b_3, b_4 векторларын табыйк:

$$b_1 = a_1 - a_2 + a_3 = (1;2;1;2) - (-2;0;1;3) + (-1;-2;3;2) =$$
$$= (2;0;3;1),$$

$$b_2 = 2a_1 - a_2 - a_3 = 2(1;2;1;2) - (-2;0;1;3) - (-1;-2;3;2) =$$
$$= (5;6;-2;-1),$$

$$b_3 = -a_1 + a_2 - a_3 = -(1;2;1;2) + (-2;0;1;3) - (-1;-2;3;2) =$$
$$= (-2;0;-3;-1),$$

$$b_4 = -2a_1 - a_2 + 2a_3 = -2(1;2;1;2) - (-2;0;1;3) +$$
$$+ 2(-1;-2;3;2) = (-2;-8;3;-3).$$

Ул вакытта $3b_1 - 2b_2 + 3b_3 - b_4 = 3(2;0;3;1) - 2(5;6;-2;-1) +$ $+ 3(-2;0;-3;-1) - (-2;-8;3;-3) = (-8;-4;1;5)$ була.

б) Бу мисалны икенче ысул белән чишәбез. Шуңа күрә b_1, b_2, b_3, b_4 векторлары аша бирелгән сызыкча комбинацияне a_1, a_2, a_3 векторлары аша күрсәтәбез:

$$3b_1 - 2b_2 + 3b_3 - b_4 = 3(2a_1 + a_2 - 3a_3) - 2(a_1 + a_2 - a_3) +$$
$$+ 3(-a_1 + 2a_2 - 3a_3) - (3a_1 - a_2 + 2a_3) = 6a_1 + 3a_2 - 9a_3 - 2a_1 - 2a_2 +$$
$$+ 2a_3 - 3a_1 + 6a_2 - 9a_3 - 3a_1 + a_2 - 2a_3 = -2a_1 + 8a_2 - 18a_3.$$

Димәк, $3b_1 - 2b_2 + 3b_3 - b_4 = -2a_1 + 8a_2 - 18a_3 = -2(1;2;1;2) +$ $+8(-2;0;1;3) - 18(-1;-2;3;2) = (0;32;-48;-16).$

3. $a = (2; 0; 8)$ векторы $a_1 = (2; -1; 3)$ һәм $a_2 = (4; -3; 1)$ векторларының сызыкча комбинациясе буламы?

Чишү. Безгә ниндидер $k_1, k_2 \in$ $\boldsymbol{R}$ саннары өчен a векторын $a = k_1 a_1 + k_2 a_2$ рәвешендә күрсәтергә мөмкинме икәнлеген ачыкларга кирәк.

Бирем буенча, $k_1 a_1 + k_2 a_2 = k_1(2; -1; 3) + k_2(4; -3; 1) = (2k_1 + 4k_2; -k_1 - 3k_2; 3k_1 + + k_2) = (2; 0; 8)$ булырга тиеш. Моннан k_1, k_2 үзгәрешләренә карата түбәндәге тигезләмәләр системасына киләбез:

$$\begin{cases} 2k_1 + 4k_2 = 2, \\ -k_1 - 3k_2 = 0, \\ 3k_1 + k_2 = 8. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәдән табылган $k_1 = -3k_2$ кыйммәтен беренче һәм өченче тигезләмәгә куйсак,

$\begin{cases} 2(-3k_2) + 4k_2 = 2. \\ 3(-3k_2) + k_2 = 8, \end{cases}$ ягъни $\begin{cases} -2k_2 = 2, \\ -8k_2 = 8 \end{cases}$ системасын табабыз.

Моннан $k_2 = -1, k_1 = 3$ була.

Димәк, a векторы a_1 һәм a_2 векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелә һәм $a = 3a_1 - a_2$ була.

4. Бирелгән тигезлекләрне канәгатьләндерүче x векторын табыгыз.

а) $a_1 - 2a_2 - 3a_3 + 2x = 0, a_1 = (5; -8; -1; 2), a_2 = (2; -1; 4; -3),\ a_3 = (-3; 2; -5; 4)$;

б) $3(a_1 - x) - 2(a_2 + x) = 6(a_3 + x), a_1 = (2; 5; 1; 3)$,
$a_2 = (10; 1; 5; 0), a_3 = (4; 1; -1; 1)$.

Чишү.

а)$2x = -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = -(5; -8; -1; 2) + 2(2; -1; 4; -3) + + 3(-3; 2; -5; 4) = (-10; 12; -6; 4)$. Моннан $x = (-5; 6; -3; 2)$ була.

б) Җәяләрне ачып һәм охшаш буыннарны җыеп,
$11x = 3a_1 - 2a_2 - 6a_3$ булуын табабыз. Моннан $11x = 3(2; 5; 1; 3) - -2(10; 1; 5; 0) - 6(4; 1; -1; 1) = (-38; 7; -1; 3)$.

Димәк, $x = (-\frac{38}{11}; \frac{7}{11}; -\frac{1}{11}; \frac{3}{11})$ була.

5.$a_1 = (1; 2; 3), a_2 = (-1; 1; -2), a_3 = (1; 0; 2), a_4 = (-2; 1; 2)$ векторлар системасының сызыкча тышчасын табыгыз.

Чишү. Ирекле $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}$ коэффициентлары ярдәмендә бирелгән a_1, a_2, a_3, a_4 векторлар системасының сызыкча комбинациясен табабыз:
$\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \lambda a_4 = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4, 3\lambda_1 - 2\lambda_2 +$
$+2\lambda_3 + 2\lambda_4)$.

Ул вакытта $\mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 +$
$+ \lambda_4 a_4 | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}\} = \{(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4, 3\lambda_1 - 2\lambda_2 +$
$+ 2\lambda_3 + 2\lambda_4) | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}\}$

Биредә $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ саннары чиксез күп төрле кыйммәтләр алганга күрә, бу күплектә векторлар саны чиксез күп була. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}$ урынына ниндидер саннар куеп $\mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ күплегендәге аерым векторларны табарга була.

Мәсәлән, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 2$ булганда,
$(-4; 4; 5) \in \mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 1$булганда,
$(-1; 4; 5) \in \mathrm{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

§ 3.2. Векторлар системасының сызыкча бәйлелеге һәм бәйсезлеге

1. Төп билгеләмәләр һәм мисаллар

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \boldsymbol{R}^n, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k \in \boldsymbol{R}$ булсын.

Билгеләмә. *Әгәр* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ *тигезлеге* $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0, \dots, \lambda_k = 0$ *очрагында гына мөмкин булса,* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ *векторлар системасы сызыкча бәйсез дип атала.*

Билгеләмә. *Әгәр* $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \dots + \lambda_k a_k = \theta$ *тигезлеге барысы да берьюлы нульгә тигез булмаган* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ *коэффициентлары өчен үтәлсә,* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ *векторлар системасы сызыкча бәйле дип атала.*

Мисал. $a_1 = (1; 0), a_2 = (0; 1), a_3 = (1; 1)$.

Биредә $1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + (-1)a_3 = \theta$, ягъни коэффициентлары нульгә тигез булмаганда да a_1, a_2, a_3 векторларының сызыкча комбинациясе нульгә тигез. Билгеләмә буенча, мондый a_1, a_2, a_3 векторлар системасы сызыкча бәйле була. Шул ук вакытта, әгәр $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \theta$ булса, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. Димәк, a_1, a_2

системасы сызыкча бәйсез.

2. Кайбер сызыкча бәйсез векторлар системалары

1. $\boldsymbol{R^n}$ пространствосында $e_1 = (1; 0; ...; 0), e_2 = (0; 1; ...; 0), ...,$ $e_n = (0; 0; ...; 1)$ берәмлек векторлар системасын алыйк. Шундый теорема бар.

Теорема 3.1

Берәмлек векторлар системасы сызыкча бәйсез була.

Исбатлау. $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \ldots + \lambda_n e_n = \theta$ булсын. Моннан $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\mathrm{n}) = \theta$ икәнен күрәбез. Димәк, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_\mathrm{n} = 0$. Бу вакытта, билгеләмә буенча, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ сызыкча бәйсез система була. Безгә шуны исбатларга кирәк иде дә.

Берәмлек векторлар системасы $\boldsymbol{R^n}$ пространствосында аерым урын алып тора: теләсә нинди $a \in \boldsymbol{R^n}$ векторын $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә курсәтеп була.

Дөрестән дә, әгәр $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mathrm{n}) \in \boldsymbol{R^n}$ булса**,** $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$ була. Бу нәтиҗә $a \in L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ икәнен аңлата.

Билгеләмә. *Берәмлек векторлар системасы* $\boldsymbol{R^n}$ *пространствосының стандарт базисы дип атала.*

Аның төп ике үзлегенә басым ясап китик.

Беренчедән, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – сызыкча бәйсез система, икенчедән, $\mathbf{R^n}$ пространствосындагы теләсә нинди вектор $e_1, e_2, \ldots, e_n$ системасы аша сызыкча комбинация рәвешендә курсәтелә.

2. $\mathbf{R^n}$ пространствосында махсус векторлар системасын карыйк:

$$a_1 = (0;\ 0;\ \ldots;\ \alpha_{1i_1};\ \ldots)$$
$$a_2 = (0;\ 0;\ \ldots;\ \alpha_{2i_2};\ \ldots)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_\mathrm{k} = (0;\ 0;\ \ldots;\ \alpha_{ki_k};\ \ldots)$$

биредә $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$.

Бу векторлар системасында $\alpha_{ti_t} \neq 0, t = 1; 2;\ \ldots;\ k$, һәрбер векторның шушы координатасына кадәрге барлык координаталары да нульгә тигез, бу координатадан соңгы координаталар – теләсе нинди реаль саннар.

Шундый системаларга мисаллар карап үтик:

1) $a_1 = (1;\ 2;\ 3; -1), a_2 = (0;\ 2;\ 1;\ 0), a_3 = (0;\ 0;\ 3;\ 1).$

Биредә $\alpha_{11} = 1 \neq 0, \alpha_{22} = 2 \neq 0, \alpha_{33} = 3 \neq 0$, шул ук вакытта бу координаталарның икенче индекслары $1 < 2 < 3$ шартын канәгатьләндерә.

2) $a_1 = (1;\ 2;\ 3; -1; 2),\ \ a_2 = (0;\ 0;\ 5;\ 3;\ 1),\ \ a_3 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2).$ Биредә $\alpha_{11} = 1 \neq 0, \alpha_{23} = 5 \neq 0, \alpha_{35} = 2 \neq 0$. Бу координаталарның икенче индекслары $1 < 3 < 5$ шартын канәгатьләндерә.

3) $a_1 = (0;\ 1;\ 2; -1; 3), a_2 = (0;\ 0;\ 3;\ 2;\ 0), a_3 = (0;\ 0;\ 0;\ 2;\ 1),$ $a_4 = (0;\ 0;\ 0;\ 0; -2)$. Бу мисалда $\alpha_{12} = 1 \neq 0,\ \alpha_{23} = 3 \neq 0,\ \alpha_{34} = 2 \neq 0, \alpha_{45} = -2 \neq 0$. Шул ук вакытта икенче индекслар өчен $2 < 3 < 4 < 5$ тигезсезлекләре үтәлә.

Игътибар белән карасак, каралган системалардагы векторларның нуль булмаган беренче координаталары баскыч ясап торалар. Бу баскыч астындагы барлык координаталар нульгә тигез.

Түбәндә шул баскычларны ясап күрсәтик.

$$\begin{array}{lll}
a_1 = (\underline{1};\ 2;\ 3; -1) & a_1 = (\underline{1};\ \underline{2};\ 3; -1;\ 2) & a_1 = (0; \underline{1};\ 2;\ -1;\ \ 3) \\
a_2 = (0; \big|\ \ \underline{2};\ 1;\ 0) & a_2 = (0;\ 0;\ \big|\underline{5};\ \underline{\ 3};\ 1) & a_2 = (0;\ 0;\ \big|\underline{3};\ \ 2;\ \ 0) \\
a_3 = (0;\ 0; \big|\ \ \underline{3};\ \underline{1}) & a_3 = (0;\ 0;\ 0;\ \ \ 0; \big|\ \underline{2}) & a_3 = (0;\ 0;\ 0;\ \ \big|\underline{2};\ \ 1) \\
 & & a_4 = (0;\ 0;\ 0;\ \ 0;\ \big|\underline{-2})
\end{array}$$

Мондый векторлар системасы *баскычсыман векторлар системасы* дип атала.

Теорема 3.2

Баскычсыман векторлар системасы – сызыкча бәйсез система.

Исбатлау. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ без тикшерә торган векторлар системасы булсын.

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \ldots + \lambda_n a_n = \theta$ дип фараз итәбез. Ул вакытта бу тигезлекнең сул ягындагы векторның баштагы координаталары нуль, i_1 нче координатасы $\lambda_1\alpha_{1i_1}$ гә тигез, i_2 нче координатасы $\lambda_1\alpha_{1i_2}+\lambda_2\alpha_{2i_2},\ldots,$ i_k нчы координатасы $\lambda_t\alpha_{ti_t}(t=1;\ 2;\ \ldots;\ k)$ рәвешендәге k кушылучының суммасына тигез була. $\lambda_1\alpha_{1i_1}=0$ тигезлегеннән, $\alpha_{1i_1}\neq 0$ булуын исәпкә алып, $\lambda_1=0$ икәнен күрәбез. $\lambda_1\alpha_{1i_2}+\lambda_2\alpha_{2i_2}=0$ шартыннан $\lambda_2=0$ нәтиҗәсенә киләбез (чөнки $\lambda_1=0$, $\alpha_{2i_2}\neq 0$).

Шушы рәвешчә, i_k нчы координатага җитеп, $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_{k-1}=0$ һәм $\alpha_{ki_k}\neq 0$ булуын исәпкә алып, $\lambda_k=0$ икәнен табабыз.

Шулай итеп, $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3+\ \ldots\ +\ \lambda_ka_k=\theta$ булса, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=0,\ldots,\ \lambda_k=0$ булачак. Бу нәтиҗә $a_1,a_2,\ldots,a_k$ системасының сызыкча бәйсез булуын күрсәтә.

3. Сызыкча бәйлелек билгеләре

1. Системадагы ниндидер бер вектор калганнарының сызыкча комбиациясе булганда гына система сызыкча бәйле була.

Исбатлау. $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйле булсын. Ул вакытта $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\lambda_3a_3+\ \ldots\ +\ \lambda_ka_k=\theta$ тигезлеге барысы да берьюлы нульгә тигез булмаган $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ коэффициентлары өчен үтәле. $\lambda_k\neq 0$ дип алыйк.

Ул вакытта $a_k=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right)a_1+\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_k}\right)a_2+\ldots+\left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right)a_{k-1}$, ягъни a_k векторы $a_1,a_2,\ldots,a_{k-1}$ векторларының сызыкча комбинациясе булып тора.

Киресенчә, a_s векторы $(1\leq s\leq k)$ башка векторларның сызыкча комбинациясе дип фараз итик, ягъни $a_s=\mu_1a_1+\ldots+\mu_{s-1}a_{s-1}+$ $+\mu_{s+1}a_{s+1}+\ldots+\mu_ka_k$ булсын. Ул вакытта $\mu_1a_1+\ \mu_2a_2+\ldots+$ $+(-1)a_s+\ldots+\mu_ka_k=\theta$ һәм шул ук вакытта сул яктагы коэффициентларының барысы да нульгә тигез түгел. Димәк, $a_1,a_2,\ldots,a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйле.

Бу билге векторларның сызыкча бәйлелек билгеләмәсен яңача бирергә мөмкинлек бирә.

Билгеләмә. *Бирелгән системаның иң кимендә бер векторы башка* *векторларның сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелсә, бу векторлар системасы сызыкча бәйле дип атала.*

Исбатланган үзлек элек бирелгән билгеләмәнең яңа билгеләмәгә эквивалент булуын күрсәтә. Практикада соңгы билгеләмә ешрак кулланыла.

2. Нуль-вектор кергән векторлар системасы сызыкча бәйле була.

Исбатлау. $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ векторлар системасының бер векторы нуль-вектор булсын, әйтик, $a_s = \theta$. Бу вакытта $0a_1 + 0a_2 + +\ldots + 1a_s + \ldots + 0a_k = \theta$ була. Биредә $a_s = \theta$ векторы янындагы коэффициент нульгә тигез түгел. Димәк, бу система сызыкча бәйле.

3. Әгәр векторлар системасының бер өлеше (күплекчәсе) сызыкча бәйле системаны тәшкил итсә, барлык система сызыкча бәйле була.

Исбатлау. $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ векторлар системасын карыйк. $a_1, a_2, \ldots, a_s$ өлеше сызыкча бәйле булсын. Бу вакытта, билгеләмә буенча, $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_s a_s = \theta$ булырлык, барысы да берьюлы нульгә тигез булмаган $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ саннары булачак. Моннан барлык коэффициентлары да нульгә тигез булмаган $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_s a_s + + 0a_{s+1} + \ldots + 0a_k = \theta$ тигезлеге үтәлгәне күренә. Бу нәтиҗә $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ векторлар системасының да сызыкча бәйлелеген күрсәтә.

Бу билгедән сызыкча бәйсез системаның бер үзлеген чыгарырга була:

Әгәр $a_1, a_2, \ldots, a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйсез булса, аның теләсә нинди кучелекчәсе дә сызыкча бәйсез була.

Исбатлау. Исбатлауны киредән чыгып төзибез. Системаның нindидер өлеше сызыкча бәйле дип фараз итәбез. Ул вакытта, өченче үзлек нәтиҗәсендә, барлык $a_1, a_2, \ldots, a_k$ системасы да сызыкчы бәйле була. Бу безнең фаразыбызга каршы килә. Димәк, сызыкча бәйсез системаның теләсә нинди күплекчәсе сызыкча бәйсез була.

4. Бер-берсенә тигез яки пропорциональ ике векторны үз эченә алган векторлар системасы сызыкча бәйле була.

Исбатлау. $i \neq j, 1 \leq i, j \leq k, \lambda \in \boldsymbol{R}$ булганда, нindидер a_i һәм a_j өчен $a_i = \lambda a_j$ үтәлсә, икенче билгеләмә буенча, a_i һәм a_j векторлары сызыкча бәйле система төзиләр. Бу вакытта, өченче билге буенча, $a_1, a_2, \dots, a_k$ системасы да сызыкча бәйле була.

5.Әгәр $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \in L(b_1, b_2, \dots, b_k)$ булса, $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ векторлар системасы сызыкча бәйле була.

Исбатлау. Исбатлауны математик индукция ысулы белән башкарабыз. $k = 1$ булсын. Ул вакытта $a_1 \epsilon L(b_1)$ һәм $a_2 \epsilon L(b_1)$, ягъни $a_1 = \lambda_1 b_1$ һәм $a_2 = \lambda_2 b_1$ була. Әгәр $\lambda_1 = 0$ булса, $a_1 = \theta$ була һәм a_1, a_2 системасы, θ векторны эченә алган система буларак, сызыкча бәйле була. $\lambda_2 = 0$ дип алсак та шушы нәтиҗәгә киләбез.

Әгәр $\lambda_1 \neq 0$ һәм $\lambda_2 \neq 0$ булса, $\lambda_2 a_1 - \lambda_1 a_2 = \lambda_2 \lambda_1 b_1 - \lambda_1 \lambda_2 b_1 = \theta$ ягъни $\lambda_2 a_1 + (-\lambda_1) a_2 = \theta$ була. Бу нәтиҗә a_1, a_2 системасының сызыкча бәйле булуын аңлата. Шулай итеп, $k = 1$ очрагы өчен теорема исбатланды.

Теорема $k = m - 1 > 1$ өчен дөрес дип фараз итәбез һәм $k = m$ өчен аның дөреслеген исбатлыйбыз. $a_1, a_2, \dots, a_{m+1} \in L(b_1, b_2, \dots, b_m)$ булганлыктан,

$$\begin{aligned}
&a_1 = \lambda_{11} b_1 + \lambda_{12} b_2 + \ \dots + \lambda_{1m} b_m \\
&a_2 = \lambda_{21} b_1 + \lambda_{22} b_2 + \ \dots + \lambda_{2m} b_m \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (3.1) \\
&a_m = \lambda_{m1} b_1 + \lambda_{m2} b_2 + \ \dots + \lambda_{mm} b_m \\
&a_{m+1} = \lambda_{m+11} b_1 + \lambda_{m+12} b_2 + \ \dots + \lambda_{m+1m} b_m
\end{aligned}$$

Әгәр (3.1) тигезлекләренең уң ягында b_m векторы ягындагы барлык коэффициентлар нульгә тигез булса, $a_1, a_2, \dots, a_m \in L(b_1, b_2, \dots, b_{m-1})$ һәм, индуктив фараз буенча, $a_1, a_2, \dots, a_m$ сызыкча бәйле система була. Бу вакытта өченче билге буенча $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ системасы да сызыкча бәйле була.

Әгәр b_m янындагы коэффициентларның иң кимендә берсе, мәсәлән, λ_{m+1m} нульгә тигез булмаса, (3.1) дәге $(m + 1)$ нче тигезлекне эзлекле рәвештә $k_i = \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{m+1m}}$ санына тапкырлап, беренче m тигезлектән алабыз, биредә $i = 1; 2; \dots; m$. Ул вакытта түбәндәге тигезлекләр табыла:

$$a_1 - k_1 a_{m+1} = \lambda_{11} b_1 + \ \dots + \lambda_{1m-1} b_{m-1}$$

$$a_2 - k_2 a_{m+1} = \lambda_{21} b_1 + \ldots + \lambda_{2m-1} b_{m-1}$$

……………………………………..

$$a_m - k_m a_{m+1} = \lambda_{m1} b_1 + \ldots + \lambda_{mm-1} b_{m-1}$$

Моннан $a_1 - k_1 a_{m+1}, \ldots, a_m - k_m a_{m+1} \in L(b_1, b_2, \ldots, b_{m-1})$ икәнен күрәбез. Индуктив фараз буенча, m вектордан төзелгән $a_1 - k_1 a_{m+1}, a_2 - - k_2 a_{m+1}, \ldots, a_m - k_m a_{m+1}$ векторлар системасы сызыкча бәйле. Димәк, $\lambda_1(a_1 - k_1 a_{m+1}) + \lambda_2(a_2 - k_2 a_{m+1}) + \ldots + \lambda_m(a_m - k_m a_{m+1}) = \theta$ һәм $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ саннары берьюлы нульгә тигез түгел.

$\lambda_{m+1} = -(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_m k_m)$ дип тамгаласак, бу сызыкча комбинация түбәндәге рәвешкә килә. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m + \cdots + \lambda_{m+1} a_{m+1} = \theta$, биредә $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ коэффициентлары берьюлы нульгә тигез булмый. Димәк $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ векторлар системасы сызыкча бәйле. Үзлек исбатланды.

6. Әгәр $a_1, a_2, \ldots, a_m \in L(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ һәм $m > k$ булса, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ векторлар системасы сызыкча бәйле була.

Исбатлау. Әгәр $m = k + 1$ булса, бу 5 нче үзлек була.
Әгәр $m > k + 1$ булса, 5 нче үзлек буенча, сызыкча бәйле булган $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{k}+1}$ кече системасы табыла. Ул вакытта, 3 нче үзлек буенча, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ системасы шулай ук сызыка бәйле була.

7. Әгәр векторлар системасында векторлар саны аларның үлчәменнән зуррак булса, андый система сызыкча бәйле була.

Исбатлау. $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{k}}$ $, k > n$ векторлар системасы бирелсен. Элегрәк күрсәтелгәнчә, $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{k}} \in L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Шарт буенча, $k > n$ булганлыктан, 6 нчы үзлекне кулланып, $a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{k}}$ системасы сызыкча бәйле була дигән нәтиҗәгә киләбез.

Күнегүләр

1. a_1, a_2, a_3 векторлар системасының сызыкча бәйле яки бәйсез улуын ачыклагыз.

а) $a_1 = (1;2;3), a_2 = (2;1;3), a_3 = (2;4;6)$.

б) $a_1 = (1;2;3), a_2 = (0;0;0), a_3 = (1;5;3)$.

в) $a_1 = (1;-1;1), a_2 = (2;-1;0), a_3 = (1;-1;1)$.

г) $a_1 = (1;2), a_2 = (3;4), a_3 = (-1;1)$.

д) $a_1 = (1;1;1), a_2 = (0;1;1), a_3 = (1;0;1)$.

е) $a_1 = (1;1;1), a_2 = (1;0;1), a_3 = (0;1;0)$.

ж) $a_1 = (1;-1;2), a_2 = (-2;1;1), a_3 = (-4;1;6)$.

Чишү. Сызыкча бәйлелекнең билгеләре буенча, а), б), в), г) мисалларында китерелгән системалар сызыкча бәйле була, чөнки а) мисалында ике пропорциональ вектор, б) мисалында нуль вектор, в) очрагында узара тигез векторлар бар, ә г) мисалында системадагы векторлар саны аларның үлчәменнән зуррак. д), е), ж) мисалларын сызыкча бәйлелек һәм байсезлек билгеләмәләренә таянып чишебез.

д) $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta$, ягъни $\lambda_1(1;1;1) + \lambda_2(0;1;1) + \lambda_3(1;0;1) ==$ $(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \theta$ дип алабыз. Бу $\lambda_1 + \lambda_3$= 0, $\lambda_1 + \lambda_2 =$ $= 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ булуын аңлата. Өченче тигезләмәдән, беренчесен исәпкә алып, $\lambda_2 = 0$, икенчесен исәпкә алып, $\lambda_3 = 0$ булуын табабыз. Моннан $\lambda_1 = 0$ булуы күренә. Шулай итеп, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Димәк, бирелгән система сызыкча бәйсез.

е) $\lambda_1(1;1;1) + \lambda_2(1;0;1) + \lambda_3(0;1;0) = \theta$, ягъни ($\lambda_1$+$\lambda_2$, λ_1+λ_3, λ_1+ +λ_2) = θ булсын. λ_1, λ_2, λ_3 коэффициентларын табу өчен, түбәндәге система киләбез:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \end{cases} \text{ яки } \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Икенче тигезләмәдән $\lambda_1 = -\lambda_3$ һәм беренче тигезләмәдән $\lambda_2 = -\lambda_1 = \lambda_3$ булуы чыга. Ирекле реаль с саны өчен λ_3= с итеп алсак, бирелгән системаны өч үлчәмле $(-\,c; c; c\,)$ векторының координаталары канәгатьләндерелә дигән нәтиҗәгә киләбез. Әгәр $c\ \neq 0$ булса, бу вектор шулай ук нуль-вектор булмый. Димәк, бу очракта барысы да нульгә тигез булмаган λ_1= $-c$, $\lambda_2 = c$, $\lambda_3 = c$ саннары бар. Бу нәтиҗә системаның сызыкча бәйле булуын аңлата.

ж) $\lambda_1 a_1$+$\lambda_2 a_2$+$\lambda_3 a_3$= θ дип алыйк, ягъни $\lambda_1(1;\ -1; 2) +\ \lambda_2(-2; 1; 1) +$ $+\ \lambda_3(-4; 1; 6) = (\lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3; -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3; 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3) = \theta$ булсын. Моннан λ_1, λ_2, λ_3 үзгәрешлеләренә карата бериш тигезләмәләр системасы чыга:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Системаның беренче һәм икенче тигезләмәләрен кушып, $-\lambda_2 - 3\lambda_3 == 0$ булуын һәм моннан λ_2= $-3\lambda_3$ икәнен табабыз. λ_2 урынына табылган кыйммәтне куеп түбәндәге системаны төзибез:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_3 - 4\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 + \lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_3 + 6\lambda_3 = 0, \end{cases} \text{ ягъни } \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0, \end{cases} \text{ ягъни } \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәдән λ_1= $-2\lambda_3$ булуын табабыз. Бу кыйммәтне икенче тигезләмәгә куйгач $\lambda_3 = 0$ һәм моннан $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ булуы чыга. Шулай итеп, әгәр $\lambda_1 a_1$+$\lambda_2 a_2$+$\lambda_3 a_3 = 0$ булса, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Димәк, a_1, a_2, a_3 системасы сызыкча бәйсез.

2. Әгәр $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйсез, ә $a_1, a_2, \dots, a_k$, b системасы сызыкча бәйле булса, b векторының a_1, $a_2, \dots, a_k$ векторларының сызыкча комбинациясе булуын исбатлагыз.

Исбатлау. Бирелеш буенча, $\lambda_1 a_1 +\ \dots + \lambda_k a_k + \lambda b = \theta$ шартын канәгатьләндерерлек барысы да берьюлы нульгә тигез булмаган $\lambda_1, \lambda_2, \dots,\ \lambda_k, \lambda$ саннары бар. Әгәр $\lambda\ =\ 0$ дип алсак, $\lambda_1 a_1 +\ \dots + \lambda_k a_k$= θ булачак, һәм нуль булмаган коэффициентлар $\lambda_1, \lambda_2, \dots,\ \lambda_k$ арасында булырга тиеш була. Ә бу a_1, $a_2, \dots, a_k$ векторлар системасының сызыкча бәйсез булуына каршы килә. Димәк, $\lambda \neq 0$. Ул вакытта b = $\left(\frac{-\lambda_1}{\lambda}\right) a_1 +\ \dots + \left(\frac{-\lambda_k}{\lambda}\right) a_k$, ягъни b векторы a_1, a_2, ... , a_k векторларының сызыкча комбинациясе була.

3. Әгәр $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйсез, ә $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$ рәвешендә язылса, бу язылышның бердәнбер булуын исбатлагыз.

Исбатлау. b өчен икенче $b = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_k a_k$ язылышы да бар дип фараз итәбез. Сул яктагы буыннардан сул як буыннарны, уң яктагы буыннардан уң як буыннарны алып, $(\lambda_1 - \mu_1)\ a_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\ a_2 + \dots + (\lambda_k - \mu_k)a_k = \theta$ тигезлегенә киләбез. $a_1,\ a_2, \dots, a_k$ векторлар системасы сызыкча бәйсез булганга күрә, моннан $\lambda_i - \mu_i = 0$, ягъни $\lambda_i = \mu_i$ була, биредә $i = 1; 2; \dots; k$. Бу нәтиҗә b векторының $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k$ векторлары аша күрсәтелешенең бердәнбер икәнен аңлата.

4. Әгәр $\lambda a = \theta$ булса, $\lambda = 0$ яки $a = \theta$ булуын исбатлагыз. Бу нәтиҗәне кулланып, нуль булмаган бер вектордан торучы системаның сызыкча бәйле яки бәйсез булуын ачыклагыз.

Исбатлау. $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ булса, $\lambda a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n) = \theta$ шартыннан $\lambda\alpha_1 = 0,\ \lambda\alpha_2 = 0, \dots, \lambda\alpha_n = 0$ булуы чыга. Бу $\lambda = 0$ яки $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 =$
$= 0, \dots, \alpha_n = 0$, ягъни $a = \theta$ булуын аңлата. Димәк, $a \neq \theta$ дип алып, $\lambda a = \theta$ дип фаразласак, $\lambda = 0$ була. Димәк, $a \neq \theta$ векторы сызыкча бәйсез система тәшкил итә.

5. Сызыкча бәйсез a, b, c векторлар системасы бирелгән. $a + b, b + c, a + c$ векторлар системасы сызыкча бәйсез булырмы?

Чишү. $\lambda_1(a + b) + \lambda_2(b + c) + \lambda_3(a + c) = \theta$ дип алабыз. Безгә λ_1, λ_2, λ_3 коэффициентларының мөмкин булган кыйммәтләрен ачыкларга кирәк. Сул яктагы җәяләрне ачып һәм охшаш буыннарны бергә җыйсак, $(\lambda_1 + + \lambda_3)a + (\lambda_1 + \lambda_2)b + (\lambda_2 + \lambda_3)c = \theta$ тигезлеге табыла. $a,\ b,\ c$ сызыкча бәйсез система булганга күрә, $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ булырга тиеш. Моннан бары тик бер генә чишелеше $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ булган $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$ системасы чыга. Килеп чыккан нәтиҗә $a + b,\ b + c,\ a + c$ системасының сызыкча бәйсез булуын аңлата.

6. а) Әгәр $a_1,\ a_2, \dots, a_k$ сызыкча бәйсез система һәм $p_i \neq 0,\ i = 1; 2; \dots; k$ булса, $p_1 a_1,\ p_2 a_2, \dots, p_k a_k$ системасы да сызыкча бәйсез икәнен исбатлагыз.

б) $a_1,\ a_2$ векторлары үзара пропорциональ булган очракта гына бу ике вектордан төзелгән системаның сызыкча бәйле булуын исбатлагыз.

Исбатлау. а) Исбатлау өчен дип $\lambda_1(p_1 a_1) + \lambda_2(p_2 a_2) + \dots + \lambda_k(p_k a_k) = \theta$ фаразлап, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_k = 0$ булуын күрсәтергә кирәк (биредә $p_1 \neq 0, p_2 \neq 0, \dots, p_k \neq 0$ булуын исәпкә алыгыз). Үзлектән чишеп бетерегез.

б) a_1, a_2 – сызыкча бәйле система дип фараз итик. Бу вакытта, билгеләмә буенча, бер үк вакытта нульгә тигез булмаган һәм $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \theta$ тигезлеген канәгатьләндергән λ_1, λ_2 саннары бар. $\lambda_1 \neq 0$ дип алсак, $a_1 =$
$= -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) a_2$ була, ягъни a_1 һәм a_2 пропорциональ векторлар булалар.

Киресенчә, a_1, a_2 үзара пропорциональ векторлар булсын, ягъни $a_1 =$
$= k a_2$. Ул вакытта $a_1 + (-k) a_2 = \theta$, биредә ике коэффициент (1 һәм $-k$) берьюлы нуль булмау сәбәпле, a_1, a_2 системасы сызыкча бәйле була.

§3.3. Векторлар системасының базисы һәм рангы

Билгеләмә. $a_1,\ a_2, \dots, a_k$ *– бирелгән векторлар системасы,* $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ *аның күплекчәсе булсын, ягъни* $\{e_1,\ e, \dots, e_r\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. *Әгәр*

1) $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ *сызыкча бәйсез система булса;*

2) теләсә кайсы $a_i (i = 1; 2; \dots; k)$ *вектор* $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ *векторларының сызыкча комбинациясе булып торса,* $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ *системасы* $a_1,\ a_2, \dots, a_k$ *векторлар системасының базисы дип атала.*

Мәсәлән, $a_1 = (1; 0), a_2 = (0; 1), a_3 = (1; 2)$, системасы өчен a_1 һәм a_2 күплекчәсе базис булып тора. Чөнки, беренчедән, $a_1,\ a_2$ сызыкча бәйсез система (үзегез тикшерегез), икенчедән, a_1, a_2, a_3 векторлары a_1, a_2 векторларының сызыкча комбинациясе булып тора:

$$a_1 = 1a_1 + 0a_2, \quad a_2 = 0a_1 + 1a_2, \quad a_3 = 1a_1 + 2a_2.$$

Векторлар системасының берничә базисы булырга мөмкин. Бирелгән векторлар системасы өчен a_1 , a_3 яки a_2 , a_3 күплекчәләре шулай ук базис булып тора (Моның шулай икәнен үзегез тикшерегез.)

Теорема 3.3

Бер үк системаның төрле базисларына кергән векторлар саны үзара тигез.

Исбатлау. $a_1,\ a_2, \dots , a_k$ бирелгән векторлар системасы. $a'_1,\ a'_2, \dots , a'_r$ – бу системаның бер базисы, $a''_1,\ a''_2, \dots , a''_l$ икенче базисы булсын. Ягъни бер базиста l вектор, икенчесендә r вектор дип фараз итик. Безгә $r = l$ булуын исбатларга кирәк. $a''_1,\ a''_2, \dots , a''_l$ векторлары $a_1,\ a_2, \dots , a_k$ системасының базисы булганлыктан, $a_1,\ a_2, \dots , a_k$ системасының барлык векторлары, димәк, $a'_1,\ a'_2, \dots , a'_r$ векторлары да, базис векторларның сызыкча комбинациясе булып тора. Димәк, $a'_1,\ a'_2, \dots , a'_r \in L(a''_1,\ a''_2, \dots , a''_l)$. Моннан сызыкча бәйлелекнең 6 нчы билгесеннән $r \leq l$ булуы чыга. $a'_1,\ a'_2, \dots , a'_r$ базис булганга, бирелгән системаның барлык векторлары, димәк, $a''_1,\ a''_2, \dots , a''_l$ векторлары да базис векторларның сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелергә тиеш, ягъни $a''_1,\ a''_2, \dots , a''_l \in L(a'_1,\ a'_2, \dots , a'_r)$. Моннан $l \leq r$ нәтиҗәсенә киләбез. Димәк, $r = l$. Теорема исбатланды.

Бу теорема нигезендә бирелгән системаның барлык базисларына кергән векторлар саны ниндидер бер натураль сан була. Базислар үзгәрсә дә, бу сан үзгәрми.

Билгеләмә. *Векторлар системасының базисына кергән векторлар саны векторлар системасының рангы дип атала.*

Векторлар системасының рангы r булса, бирелгән системада r сызыкча бәйсез вектор була һәм аның r дан күбрәк вектордан торган теләсе кайсы күплекчәсе сызыкча бәйле система тәшкил итә.

Дәрестән дә, системасының рангы r теләсе кайсы базисның векторлар санына тигез, ә базис үз чиратында сызыкча бәйсез векторлардан тора. Димәк, r вектордан төзелгән сызыкча бәйсез система һәрвакыт табыла. Икенче үзелекне тикшерү өчен, системаның барлык $a_1,\ a_2, \dots , a_k$ векторларының да $e_1,\ e_2 \dots , e_r$

базис векторларының сызыкча комбинациясе булуын исәпкә алырга кирәк.

Моннан $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k \in L(e_1,\ e_2 \dots, e_r)$ икәнен күрәбез. $a_1,\ a_2, \dots,\ a_m$ бу системасының ниндидер кече системасы булсын. Димәк, $a_1,\ a_2, \dots,\ a_m \in L(e_1,$ $e_2 \dots, e_r)$. Әгәр $m > r$ булса, сызыкча бәйлелекнең 6 нчы билгесеннән $a_1,$ $a_2, \dots,\ a_m$ сызыкча бәйле система булып чыга. Безгә шуны күрсәтергә кирәк иде дә.

Моннан векторлар системасының рангы – системадагы сызыкча бәйсез векторларның иң зур саны дип әйтә алабыз.

Әгәр $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ системасы $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k$ системасының базисы булса, $L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k) = L(e_1,\ e_2 \dots, e_r)$ икәнен исбатлап була. Дөрестән дә, $a_1,$ $a_2, \dots,\ a_k$ системасының сызыкча тышчасы билгеләмәсеннән, теләсә нинди $b \in$ $L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k)$ векторы $b = \lambda_1 a_1 + \ \dots + \lambda_k a_k$ рәвешендә языла.

$e_1, e_2 \dots, e_r$ системасы $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k$ системасының базисы булганга, бу системаның һәрбер векторы $e_1,\ e_2 \dots, e_r$ векторларының сызыкча комбинациясе булып тора. Бу комбинацияләрне b векторындагы $a_1,$ $a_2, \dots,\ a_k$ векторлары урынына куеп һәм җәяләрне ачып охшаш буыннарын җыйгач, $b = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_r e_r$ тигезлегенә киләбез. Бу нәтиҗә $b \in L(e_1,$ $e_2 \dots, e_r)$ булуын аңлата. Шулай итеп, $L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k) \subset L(e_1,\ e_2 \dots, e_r)$ икәнен күрсәттек.

Үз чиратында $e_1, e_2 \dots, e_r$ векторларының һәрберсен $a_1,\ a_2, \dots,\ a_k$ векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтеп була. Моның өчен $a_i = e_i$ булганда, a_i векторы янындагы коэффициентны 1, ә калганнарын 0 дип алырга кирәк. Ул чагында $b \in L(e_1,\ e_2 \dots, e_r)$ булса, $b \in L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k)$. Димәк, $L(e_1,\ e_2 \dots, e_r) \subset L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k)$. Исбатланган ике нәтиҗәдән $L(e_1,$ $e_2 \dots, e_r) = L(a_1,\ a_2, \dots,\ a_k)$ тигезлеге чыга.

Күнегүләр

1. $a_1,\ a_2, a_3,\ a_4$ векторлар системасы бирелгән. $a_1,\ a_2, a_3$ кече системасының бу системаның базисы булуын исбатлагыз. Ике вектор кергән $a_1,$ a_2, өч векторлы $a_1,\ a_2, a_3$ һәм дүрт вектордан төзелгән $a_1,\ a_2, a_3,\ a_4$ системаларының рангын табыгыз.

а) $a_1 = (1;1;1)$, $a_2 = (1;2;3)$, $a_3 = (1;3;3)$, $a_3 = (1;0;1)$;

б) $a_1 = (1;2;3)$, $a_2 = (0;1;2)$, $a_3 = (0;0;1)$, $a_3 = (3;4;6)$.

Чишү. а) Алдан a_1, a_2, a_3 векторларының сызыкча бәйсез булуын күрсәтик. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = \theta$ дип алыйк. Моннан $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\ \lambda_1 + +2\lambda_2 + 3\lambda_3,\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0;0;0)$ тигезлеген һәм $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ коэффициентларын табу өчен, бериш сызыкча тигезләмәләр системасын төзибез: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$

Беренче һәм өченче тигезләмәләрдән $2(\lambda_2 + \lambda_3) = 0$, ягъни $\lambda_2 = -\lambda_3$ булуы чыга. Ул вакытта беренче тигезләмәдән $\lambda_1 = 0$, икенче тигезләмәдән $\lambda_3 = 0$ булуы күренә. Моннан $\lambda_2 = -\lambda_3 = 0$. Димәк, a_1, a_2, a_3 векторларының сызыкча комбинациясендә алынган $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ коэффициентлары бер үк вакытта нульгә тигез. Бу нәтиҗә a_1, a_2, a_3 системасының сызыкча бәйсез булуын, ягъни базис билгеләмәсенең беренче шарты үтәлүен күрсәтә. Хәзер бирелгән системадагы һәр векторның a_1, a_2, a_3 векторлары аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтелгәнен тикшерик.

$$a_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3,$$
$$a_2 = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3,$$
$$a_3 = 0a_1 + 0a_2 + 1a_3$$

булу сәбәпле, безгә ниндидер k_1, k_2, k_3 саннары өчен $a_4 = k_1 a_1 + k_2 a_2 + + k_3 a_3$ тигезлеге үтәлүен күрсәтергә кирәк. Бу тигезлеккә бирелгән системаның векторларын куеп һәм күрсәтелгән гамәлләрне башкарып, $(1;\ 0;\ 1) = (k_1 + k_2 + k_3, k_1 + 2k_2 + 3k_3, k_1 + 3k_2 + 3k_3)$ тигезлегенә киләбез. Биредәге k_1, k_2, k_3 саннары түбәндәге сызыкча тигезләмәләр системасын канәгатьләндерә:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 1, \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0\,, \\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 1. \end{cases}$$

Беренче тигезләмәдән $k_2 + k_3 = 1 - k_1$ кыйммәтен табып өченче тигезләмәгә куйгач, $k_1 + 3(1 - k_1) = 1$, ягъни $-2k_1 = -2$ булуын табабыз.

Димәк, $k_1 = 1$. Бу кыйммәтне беренче тигезләмә куйгач, $k_2 = -k_3$ икәне күренә. Моннан икенче тигезләмәдән $1 - 2k_3 + 3k_3 = 0$ һәм $k_3 = -1$ булуын табабыз. Бу вакытта $k_2 = 1$ була. Димәк, $a_4 = a_1 + a_2 - a_3$. Бу тигезлекнең дөреслеген тикшерик: $a_1 + \ a_2 - a_3 = (1;1;1) + (1;2;3) - (1;3;3) = (1;0;1) = a_4$. Шулай итеп, a_1, a_2, a_3, a_4 системасының һәр векторы a_1, a_2, a_3 кече системасының сызыкча комбинациясе булуын күрсәттек. Димәк, a_1, a_2, a_3 кече системасы базис билгеләмәсенең икенче шартын да канәгатьләндерә. Шулай итеп, a_1, a_2, a_3 системасының базис булуын исбатладык.

Моннан ранг $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = 3$ булуы чыга. a_1, a_2 һәм a_1, a_2, a_3 векторлар системалары сызыкча бәйсез булу сәбәпле, ранг $\{a_1, a_2\} = 2$, ранг $\{a_1, a_2, a_3\} = 3$.

б) a_1, a_2, a_3 векторлар системасының сызыкча бәйсез булуын үзегез исбатлагыз. Без $a_4 = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$ сызыкча комбинациясендәге k_1, k_2, k_3 коэффициентларына карата тигезләмәләр системасын гына күрсәтеп узабыз:

$$\begin{cases} k_1 = 3 \\ 2k_1 + k_2 = 4 \\ 3k_1 + 2k_2 + k_3 = 6 \end{cases}$$

Бу системаның чишелеше $k_1 = 3,\ k_2 = -2,\ k_3 = 1$ булачак. Барлык санауларны башкарып, мисалны ахыргача чишеп бетерегез.

2. a_1, a_2, a_3, a_4 векторлар системасы бирелгән. Бу системаның теләсә нинди ике векторы аның базисы икәнен күрсәтегез. Бирелгән системаның рангын табыгыз.

а) $a_1 = (1;2;3;-2), a_2 = (2;-3;1;-4)$,

$a_3 = (1;9;8;-2), a_4 = (1;-12;-7;-2)$;

б) $a = (2;1;3;-1), a_2 = (3;-1;2;0)$,

$a_3 = (1;3;4;-2), a_4 = (4;-3;1;1)$.

Чишү. Ике вектор пропорциональ булса гына алар сызыкча бәйле була. (§3.2 дәге 6 нчы күнегүне кара). Шуңа күрә икешәр вектордан торучы $a_1, a_2;\ a_1, a_3; a_1, a_4; a_2, a_3; a_2, a_4; a_3, a_4$ кече системаларын карап үтәбез. Бу кече системаларга керүче векторлар пропорциональ түгел. Димәк, кече системаларның һәрберсе сызыкча бәйсез, ягъни базисның беренче шартын канәгатьләндерәләр. Икенче шартны тикшерү өчен, бирелгән системаның һәр векторы кече система векторларының сызыкча комбинациясе булуын күрсәтергә кирәк. Бу шартны a_1, a_2 кече системасы өчен тикшереп күрсәтик. a_1, a_2 векторлары үзләре шул ук векторлар аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтелгәнән без беләбез: $a_1 = 1a_1 + 0a_2,\ a_2 = 0a_1 + 1a_2$. Шуңа күрә безгә $a_3 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,\quad a_4 = k_1 a_1 + k_2 a_2$ сызыкча комбинацияләренә кергән коэффициентларны табарга кирәк булачак. Моның өчен

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1, \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 9, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 8, \\ -2\lambda_1 - 4\lambda_2 = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} k_1 + 2k_2 = 1, \\ 2k_1 - 3k_2 = -12, \\ 3k_1 + k_2 = -7, \\ -2k_1 - 4k_2 = -2, \end{cases}$$

тигезләмәләр системаларын төзибез. Беренче системадан $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$, икенчесеннән $k_1 = -3,\ k_2 = 2$ икәнен табабыз.
Димәк, $a_3 = 3a_1 - a_2,\ a_4 = -3a_1 + 2a_2$.

Шулай итеп, a_1, a_2 кече системасы өчен базисның икенче шарты да үтәлә. Моннан a_1, a_2 кече системасы бирелгән системаның базисы дигән нәтиҗә ясыйбыз. Калган биш кече система өчен бу шартларның үтәлүен үзегез тикшерегез.

б) Бу мисалны а) пункты белән чагыштырып, үзлектән чишегез.

3. Беренче күнегүдәге векторлар системасы өчен $L(a_1, a_2, a_3) = L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ булуын тикшерегез һәм $L(a_1, a_2, a_3)$ сызыкча тышчасының нинди векторлардан торуын табыгыз.

Чишү. Билгеләмә буенча,

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) = \{b | b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \boldsymbol{R}\}.$$

$a_4 = a_1 + a_2 - a_3$ булганга, b векторын түбәндәгечә яза алабыз:

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 (a_1 + a_2 - a_3) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_4) a_1 + (\lambda_2 + \lambda_4) a_2 + (\lambda_3 - \lambda_4) a_3 = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3.$$

Монда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ коэффициентлары ирекле кыйммәтләр алганга күрә,

$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_4, \quad \mu_2 = \lambda_2 + \lambda_4, \quad \mu_3 = \lambda_3 - \lambda_4$ коэффициентлары да ирекле кыйммәтләр ала. Ләкин

$$\{\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 | \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ \epsilon \ \boldsymbol{R}\} = L(a_1, a_2, a_3).$$

Димәк, $L(a_1, a_2, a_3, a_4) = L(a_1, a_2, a_3) =$

$$= \{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3, \ \mu_1 + 3\mu_2 + 3\mu_3 | \mu_1, \mu_2, \mu_3 \ \epsilon \ \boldsymbol{R}\}.$$

§3.4 Эквивалент векторлар системаларыһәм элементар рәвешүзгәртүләр

Эквивалент векторлар системасы

Билгеләмә. *Әгәр бер векторлар системасының теләсә нинди векторы икенче система векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелсә һәм, киресенчә, икенче системаның теләсә нинди векторы беренче система векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелсә, бу ике система эквивалент системалар дип атала.*

Бу билгеләмәдән күренгәнчә, $(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ һәм (b) = $\{b_1, b_2, \dots, b_s\}$ системалары $(a) \subset L(b)$ һәм $(b) \subset L(a)$ булганда гына эквивалент булалар. Гадәттә, эквивалент системаларны $\sim$ тамгасы белән тоташтыралар, ягъни $(a) \sim (b)$дип язалар.

Теорема 3.4

Эквивалент векторлар системаларының ранглары тигез була.

Исбатлау. $(a') = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_r\}$ векторлары (a) системасының базисы, $(b') = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_e\}$ векторлары (b)системасының базисы булсын. Безгә r = l булуын күрсәтергә кирәк. Шарт буенча, (a) һәм (b)системалары эквивалент, ягъни $(a) \subset L(b)$ һәм $(b) \subset L(a)$. (a') системасы (a) системасының, (b') системасы (b) системасының базислары булу сәбәпле, $L(a)$ = $L(a')$, L (b) = $L(b')$. (§3.3 тән соң китерелгән 3 нче күнегүне карагыз.) Бирелеш буенча $(a) \subset L(b)$, $(a') \subset (a)$. Моннан $(a') \subset L(b')$ икәнен күрәбез. Әгәр $r > l$ булса, сызыкча бәйлелекнең 6 нчы үзлеге буенча (a') сызыкча бәйле система булырга тиеш. Бу нәтиҗә базис билгеләмәсенә каршы килә. Димәк, $r \leq l$**.** Аналогик рәвештә $(b') \subset (b) \subset L(a) = L(a')$ шартларыннан $l \leq r$ булуы чыга. Димәк, l = r. Теорема исбатланды.

Элементар рәвешүзгәртүләр

Билгеләмә. *Векторлар системасында:*

1. *ике векторның урынын алыштыру,*
2. *кайсыдыр векторны $\lambda \neq 0$ санга тапкырлау,*
3. *ниндидер санга тапкырланган векторны икенче векторга кушу,*
4. *нуль-векторны төшереп калдыру (әгәр андый вектор булса)*

элементар рәвешүзгәртүләр дип атала.

Мәсәлән, (a)=$\{a_1, a_2, a_3\}$ векторлар системасы бирелсен. $b_1 = a_2$, $b_2 = a_1$, $b_3 = a_3$ булсын. Бу вакытта $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ системасы (a) системасыннан беренче төр элементар рәвешүзгәртү кулланып төзелгән (a_1, a_2 векторларының урыннары алышынган). Әгәр $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ системасында $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = 2a_3$ булса, бу икенче төр элементар рәвешүзгәртү нәтиҗәсе (a_3 векторы 2 санына тапкырланган). Әгәр $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + 3a_1$, $b_3 = a_3$ дип алсак, $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ системасы (a) системасыннан өченче төр элементар рәвешүзгәртүне кулланып чыгарылган була (икенче векторга беренче вектор 3 кә тапкырланып кушылган). (a) = $\{a_1, a_2, \theta\}$, $(b) = \{a_1, a_2\}$ булсын. Бу очракта (b) системасы (a) системасыннан дүртенче төр элементар рәвешүзгәртүне кулланып табылган.

Теорема 3.5

Элементар рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә векторлар системасы эквивалент системага күчә.

Исбатлау. Теореманы элементар рәвешүзгәртүләрнең һәрбер төре өчен аерым исбатлыйбыз.

$(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ системасы (a) = $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ системасыннан ике векторның урынын алыштыру нәтиҗәсендә табылсын. Бу очракта (a) системасының һәрбер векторы (b) системасы векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә һәм, киресенчә, (b) системасының һәрбер векторы (a) системасы векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелүе, ягъни $(a) \sim (b)$ булуы ачык күренә (Барлык сызыкча комбинацияләрдә бер коэффициент бергә, калганнар нульгә тигез булуын искәртеп китәбез). Шулай итеп, беренче төр элементар рәвешүзгәртүләр өчен теорема дөрес булып чыга. $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ системасы (a) системасынан $b_1 = a_1$, $b_2 = \lambda a_2$,…, $b_k = a_k$ булырлык итеп төзелгән дип фараз итик.

Бу вакытта $\lambda \neq 0$, $a = \left(\frac{1}{\lambda}\right) b_2$ булганга күрә, $(a) \subset L(b)$ һәм шул ук вакытта $(b) \subset L(a)$. Димәк, $(a) \sim (b)$, ягъни бу очракта да теорема теорема дөрес булды.

(b) системасы (a) системасынан өченче төр элементар рәвешүзгәртү нәтиҗәсендә барлыкка килсен. Мәсәлән, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda a_1, b_3 = a_3$,…, $b_k = a_k$ булсын. Димәк, $(b) \subset L(\text{a})$, $a_1 = b_1, a_2 = b_2 - \lambda b_1, a_3 = b_3$,…, $a_k = b_k$ шартыннан (a) $\subset L(b)$ нәтиҗәсенә киләбез. Шулай итеп, бу вакытта да $(a) \sim (b)$ булуын күрәбез.

$(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \theta\}$, ә $(b) = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$ рәвешендә булсын. (a) системасының һәр векторы (b) системасы аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтелә, биредә $\theta = 0a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_{k-1}$ икәнен искәртеп китик. Димәк, $(a) \subset L(b)$. Шул ук вакытта $(b) \subset L(a)$. Димәк, дүртенче төр рәвешүзгәртүдән дә $(a) \sim (b)$ нитиҗәсе чыга. Шулай итеп, теләсә нинди элементар рәвешүзгәртү вакытында векторлар системасы эквивалент системага күчә. Безгә шуны исбатларга кирәк иде дә.

Теорема 3.6

Элементар рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә векторлар системасының рангы үзгәрми.

Исбатлау. (b) системасы (a) системасыннан элементар рәвешүзгәртүләр ярдәмендә төзелсә, 3.5 теоремасыннан $(a) \sim (b)$, ә 3.2 теоремасыннан ранг $(a) =$ ранг (b) булуы чыга. Теорема исбатланды.

Алда исбатланган теореманы кулланып, векторлар системасының базисын һәм рангын табуның практик ысулын карыйк. Бу ысул бирелгән векторлар системасының сызыкча бәйлелеген һәм бәйсезлеген ачыкларга, базис булмаган векторларны базис векторлар аша күрсәтү мөмкинлеге бирә.

$(a) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ бирелгән векторлар системасы булсын. Элементар рәвешүзгәртүләр башкарып, без баскычсыман векторлар системасы төзик һәм аны $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ дип тамгалыйк, биредә $r \leq k$ икәнен искәртеп китик.

Баскычсыман векторлар системасы сызыкча бәйсез булганга күрә, ранг $(b) = r$. 3.6 теоремасы буенча, ранг(a) =ранг(b). Моннан ранг$(a) = r$ икәнен күрәбез. Бу нәтиҗә (a) системасының теләсә нинди r сызыкча бәйсез векторы аның базисы булып торуын аңлата. Гадәттә, базисларның берсе итеп, (a) системасының рәвешүзгәртүләрдән соң (b) системасын биргән r векторын алалар.

Әгәр $r = k$ булса (ягъни системаның рангы бирелгән системаның векторлар санына тигез булса), (a) системасының базисына аның барлык векторлары да керә. Бу вакытта (a) системасы сызыкча бәйсез була.

Әгәр $r < k$ булса (бу очрак элементар рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә барлыкка килгән нуль-векторларны төшереп калдырганда була), (a) системасының базисы булып аның r сызыкча бәйсез векторыннан төзелгән кече системасы тора.

Сызыкча бәйсез векторларның иң зур саны *r* булганга, *k (k > r)* вектордан торган (a) системасы сызыкча бәйле була.

Элементар рәвешузгәртүләр вакытында һич югы бер нуль-вектор барлыкка килү бу векторга тиңдәш булган (a) системасындагы векторның шушы системаның башка векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә курсәтелгәнен аңлата. Моннан (a) системасының сызыкча бәйле булуы чыга.

Югарыда әйтелгәннәрне мисал өстендә карап үтик. $a_1 = (1; -1; -3; 3)$, $a_2 = (-1; 2; 3; -3), a_3 = (-1; 1; -9; 2), a_4 = (-1; -1; -9; 2)$ векторлар системасының базисын һәм рангын табыйк. Бу системаның сызыкча бәйлеме яки бәйсезме икәнлеген ачыклыйк, аның барлык векторларын базис векторларның сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтик.

Барлык куелган сорауларга җавап бирү өчен, элементар рәвешүзгәртүләр башкарып, $\{a_1, a_2, a_3, a_4,\}$ системасыннан баскычсыман система төзергә кирәк. Уңайлылык өчен бирелгән системаны түбәндәге таблица рәвешендә урнаштырабыз:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -9 & 2 \\ -1 & -1 & -9 & 2 \end{array}\right)\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}$$

Һәр юлы бирелгән системаның векторы булып торган мондый таблица *матрица* дип атала.

Бирелгән системага карата элементар рәвешүзгәртүләр башкарганда, бу матрицаның юлларын үзгәртүгә китерә.

Беренче адымда a_1, векторын узгәрешсез калдырып, башка векторларга a_1 векторын кушабыз. Ул вакытта $\{a_1, a_2 + a_1, a_3 + a_1, a_4 + a_1\}$ системасы килеп чыга. Аңа тиңдәшле матрица

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & -2 & -12 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 + a_1 \\ a_3 + a_1 \\ a_4 + a_1 \end{array}$$

рәвешен ала.

Бу вакытта беренче багананың беренче элементы астында барысы да нульләр барлыкка килде.

Икенче адымда, матрицаның беренче баганасы үзгәрешсез калырлык һәм икенче багананың икенче элементы астында барысы да нульләр булырлык итеп, яңа векторлар системасын төзергә кирәк. Шушы максат белән $a_1, a_2 + a_1, a_3 + a_1$, векторларын үзгәрешсез калдырып, $a_4 + a_1$ векторына $2(a_2 + a_1)$ векторын кушабыз. Бу вакытта табылган $a_1, a_2 + + a_1, a_3 + a_1, a_4 + 3a_1 + 2a_2$ системасына тиңдәш

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{array}\right)\begin{array}{l} a_1 \\ a_2 + a_1 \\ a_3 + a_1 \\ a_4 + 3a_1 + 2a_2 \end{array}$$

матрицасын табабыз.

Өченче адымда табылган системаны өченче багананың өченче элементы астында нульләр булырлык итеп узгәртергә кирәк.

Бу мисалда, $a_4 + 3a_1 + 2a_2$ векторына $-(a_3 + a_1)$ векторын кушып, $a_1, a_2 + a_1, a_3 + a_1, a_4 - a_3 + 2a_2 + 2a_1$ системасын һәм

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 + a_1 \\ a_3 + a_1 \\ a_4 - a_3 + 2a_2 + 2a_1 \end{array}$$

матрицасын табабыз.

Әгәр $b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 + a_1, b_3 = a_3 + a_1$ дип билгеләсәк, $b_1, b_2, b_3 -$баскычсыман система.

Димәк, ранг $\{b_1, b_2, b_3\} = 3$. Бу вакытта $(a) = \{a_1, a_2, a_3, a_4,\} \sim \{b_1, b_2, b_3\}$ булганга күрә, ранг $(a) = 3$ булачак.

Бирелгән системада 4 вектор, анын рангы 3 кә тигез, $3 < 4$. Моннан системаның сызыкча бәйле булуы чыга.

Рәвешүзгәртүләр башкарганнан сон табылган баскычсыман b_1, b_2, b_3 векторларына a_1, a_2, a_3 сызыкча бәйсез векторлары тиңдәш булып тора. Шуңа күрә бирелгән системаның базисы итеп a_1, a_2, a_3 кече системасын алырга була.

Хәзер бирелгән системаның барлык векторларын шушы базис аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтик. Базис векторлары өчен бу эш бик җиңел башкарыла.

Дөрестән дә, $a_1 = 1a_1 + 0a_2 + 0a_3$, $a_2 = 0a_1 + 1a_2 + 0a_3$, $a_3 = 0a_1 + 0a_2 + 1a_3$. Базиска кермәгән a_4 векторын $a_4 - a_3 + 2a_2 + 2a_1 = \theta$ тигезлегеннән табабыз: $a_4 = -2a_1 + (-2)a_2 + 1a_3$. Шулай итеп, бирелгән системаның һәрбер векторы базис векторларның сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелде.

Мисалдан күренгәнчә, гел нульләрдән генә торган юлларга туры килүче сызыкча комбинацияләр билгеле булганда, базис булмаган векторларны базис векторлар аша күрсәтү бик жиңел була. Шуңа күрә дә без кайсы юлга нинди вектор туры килүен һәр адымда күрсәтеп бардык.

Билгеләмә. *Баскычсыман векторлар системасына тиңдәш булган матрица баскычсыман матрица дип атала.*

Каралган мисалда баскычсыман матрица түбәндәге рәвештә була:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 5 \end{pmatrix}$$

Бирелгән системаның рангын табу өчен, башта тезелгән һәм һәр адымда табылган матрицаларның юллары белен элементар рәвешүзгәртүләр башкарырга туры килде. Бу үзгәртүләрне *матрицаны баскычсыман рәвешкә китерү* дип атыйлар.

Күнегүләр

1. a_1, a_2, a_3, a_4 векторлар системасының сызыкча бәйлелеген ачыклагыз.

а) $a_1 = (1; 3; 1; -3)$, $a_2 = (2; 1; 1; 1)$, $a_3 = (3; -11; -1; 19)$, $a_4 =$
$= (1; 12; 2; -16)$

б) $a_1 = (1; 1; 1; 1)$, $a_2 = (1; -1; 1; -1)$, $a_3 = (2; 3; 1; 4)$, $a_4 = (2; 1; 1; 3)$

Чишү. Куелган сорауга җавап бирү өчен, безгә системаның рангын табу җитә. Әгәр ранг векторлар санына тигез булса, система сызыкча бәйсез. Әгәр ранг векторлар санынннан кимрәк булса, система сызыкча бәйле була.

а) Бирелгән векторлар системасына тиңдәш матрица түбәндәгечә була:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

Бу матрицаны баскычсыман рәвешкә китерү өчен, беренче адымда беренче юлны үзгәрешсез калдырып, икенче юлга беренче юлны (-2)гә тапкырлап, өченче юлга беренче юлны (-3)кә тапкырлап, дүртенче юлга беренче юлны (-1)гә тапкырлап кушабыз. Ул вакытта матрица түбәндәге рәвешкә килә:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -20 & -4 & 28 \\ 0 & 9 & 1 & -13 \end{pmatrix}$$

Икенче адымда беренче һәм икенче юлларнын үзләрен калдырабыз, ә өченче һәм дүртенче юлларны (-5) астында нульләр булырлык итеп үзгәртәбез. Моның өчен икенче юлны (-4)кә тапкырлап өченчегә, а аннан соң, дүртенче юлны 5кә тапкырлап, аңа 9га тапкырлаган икенче юлны кушабыз. Матрица түбәндәгечә рәвештә була:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Нуль-векторны төшереп калдыргач, баскычсыман матрица барлыкка килә:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$b_1 = (1; 3; 1; -3)$, $b_2 = (0; -5; -1; 7)$, $b_3 = (0; 0; -4; -2)$ шушы матрицага тиндәш векторлар.

Бу системаның рангы өчка тигез. Димәк, дүрт вектордан торган бирелгән системаның да рангы өчкә тигез. Бу нәтиҗә системаның сызыкча бәйле булуын курсәтә. Санаулар вакытында нуль-вектор табылганга игътибар итегез.

б) Векторлар системасында рәвешүзгәртүләрдән соң барлыкка килгән матрицалар эзлеклелеген язабыз:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Моннан баскычсыман векторлар системасының рангы дүрткә тигез булуы күренә. Димәк, бирелгән системаның рангы векторлар санына тигез, ягъни бу система сызыкча бәйсез.

Санауларны үзегез тикшереп чыгыгыз, уңайлырак булсын өчен һәр адымда ясалган рәвешүзгәртүләрне атап китәбез.

Беренче адым: икенче юлга беренче юлны (-1)гә тапкырлап, өченче һәм дүртенче юлларга беренче юлны (-2)гә тапкырлап куштык.

Икенче адым: икенче юлны $\left(-\frac{1}{2}\right)$гә тапкырлыйбыз.

Өченче адым: өченче юлга икенче юлны (-1)гә тапкырлап, дүртенче юлга икенче юлның үзен кушабыз.

Дүртенче адым: дүртенче юлга өченче юлны (-1)гә тапкырлап кушабыз.

Мисаллар чишкәндә рәвешүзгәртүләр яттан гына башкарыла, ә нәтиҗәләр һәр адымда барлыкка килгән матрицалар эзлеклелеге рәвешендә күрсәтелә. Бу мисал нәкъ шушы тәртиптә эшләнелде.

2. Беренче күнегүдә китерелгән векторлар системасының бер базисын табыгыз.

Чишү. а) Беренче күнегүдәге кебек үк матрицаны баскычсыман рәвешкә китерәбез.

b_1, b_2, b_3 баскычсыман векторлар системасына a_1, a_2, a_4 векторлары тиңдәш була (a_3 векторы рәвешүзгәртүләр нәтиҗәсендә нуль-векторга әйләнде). Шуңа күрә a_1, a_2, a_4 кече системасы бирелгән системаның базисларының берсе булып тора.

б) Бу системада рәвешүзгәртүләрдән соң дүрт вектордан төзелгән баскычсыман система барлыкка килә. Димәк, бирелгән системаның базисын a_1, a_2, a_3, a_4 векторлары тәшкил итә. Бу мисалда базиска кермәгән векторлар юк.

3. a_1, a_2, a_3, a_4 векторлар системасының бер базисын табыгыз һәм базиска кермәгән векторларны базис векторлары аша күрсәтегез:

а) $a_1 = (1; -2; 1; 5; 3)$, $a_2 = (2; -4; 3; 3; -5)$, $a_3 = (1; -2; 4; -16; -30)$, $a_4 = (3; -6; 4; 8; -2)$;

б) $a_1 = (1; -1; 1; -1)$, $a_2 = (1; -2; 0; -3)$, $a_3 = (1; 1; -2; 3)$,
$a_4 = (2; 2; -4; 6)$.

Чишү. Бу мисалда базиска кермәгән векторларны базис векторлары аша күрсәтергә кирәк, шуңа күрә һәр адымда нинди рәвешүзгәртүләр башкарылганын язып барырбыз.

а) Бирелгән векторлардан матрица төзеп, аны баскычсыман рәвешкә китерәбез:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 3 & -5\\ 1 & -2 & 4 & -16 & -30\\ 3 & -6 & 4 & 8 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -11\\ 0 & 0 & 3 & -21 & -33\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -11\end{pmatrix}\begin{array}{l}a_1\\ a_2-2a_1\\ a_3-a_1\\ a_4-3a_1\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -7 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}a_1\\ a_2-2a_1\\ 5a_1-3a_2+a_3\\ a_4-a_1-a_2\end{array}$$

Димәк, бирелгән системаның рангы икегә тигез, система сызыкча бәйле һәм a_1, a_2 – базис векторлары. Бу базиска кермәгән a_3, a_4 векторларын базис векторлары аша күрсәтик. $a_3+5a_1-3a_2=\theta$, $a_4-a_1-a_2=\theta$ булганлыктан, $a_3=-5a_1+3a_2$, $a_4=a_1+a_2$ була. Шулай итеп, a_3, a_4 векторларын базиска кергән a_1, a_2 векторлары аша күрсәтә алдык. Бу мисалда икешәр вектордан төзелгән a_1, a_3; a_1, a_4; a_2, a_3; a_2, a_4; a_3, a_4 кече системалары да сызыкча бәйсез, шуңа күрә алар да базис булып тора. Базис итеп a_1, a_3 векторларын алсак, a_2, a_4 базиска кермәгән векторлар булалар. Аларны базис векторларның сызыкча комбинациясе аша күрсәтү өчен алдан табылган $5a_1-3a_2+a_3=\theta$ һәм $a_1+a_2-a_4=\theta$ тигезлекләрен кулланырга мөмкин. Дөрестән дә, $a_2=\frac{5}{3}a_1+\frac{1}{3}a_3$ комбинациясен $a_4=a_1+a_2$ аңлатмасына куйсак, $a_4=a_1+a_2=a_1+\frac{5}{3}a_1+\frac{1}{3}a_3=\frac{8}{3}a_1+\frac{1}{3}a_3$ була.

Шушы рәвешчә базиска кермәгән векторларның сызыкча комбинациясен башка базислар аша табарга була.

б) Чишү түбәндәгечә башкарыла:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 2 & -4 & 6\end{pmatrix}\begin{array}{l}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 2 & -3 & 4\\ 0 & 4 & -6 & 8\end{pmatrix}\begin{array}{l}a_1\\ a_2-a_1\\ a_3-a_1\\ a_4-2a_1\end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -10 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ a_1-a_2\\ a_3-a_1+2(a_2-a_1)\\ a_4-2a_1+4(a_2-a_1)\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ a_1-a_2\\ a_3-3a_1+2a_2\\ a_4-6a_1+4a_2-2(a_3-3a_1+2a_2)\end{matrix}$$

Моннан бирелгән системаның бер базисы $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$, аның рангы өчкә тигез һәм системаның сызыкча бәйле булуы күренә. $a_4 - 2a_3 = \theta$ булганга, $a_4 = 0a_1 + 0a_2 + 2a_3$ була.

4. b векторы a_1, a_2, a_3 векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелерлек итеп λ параметрының барлык кыйммәтләрен табыгыз:

а) $a_1 = (2; 3; 5)$, $a_2 = (3; 7; 8)$, $a_3 = (1; -6; 1)$, $b = (7; -2; \lambda)$;

б) $a_1 = (3; 2; 6)$, $a_2 = (7; 3; 9)$, $a_3 = (5; 1; 3)$, $b = (\lambda; 2; 5)$.

Чишү. Бирелгән векторлардан матрица төзеп, аны баскычсыман рәвешкә китерәбез.

$$\text{а)}\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 8\\ 1 & -6 & 1\\ 7 & -2 & \lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ b\end{matrix}\quad\sim\quad\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & -15 & -3\\ 0 & -26 & 2\lambda-35\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ 2a_2-3a_1\\ 2a_3-a_1\\ 2b-7a_1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\lambda-30\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ 2a_2-3a_1\\ 2a_3-a_1+3(2a_2-3a_1)\\ 2b-7a_1+5(2a_2-3a_1)\end{matrix}$$

Моннан күренгәнчә, $2\lambda - 30 = 0$, ягъни $\lambda = 15$ булган очракта b векторы a_1, a_2, a_3 векторлары аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтеләчәк.

б) Бу мисалда түбәндәге матрицалар эзлеклелеген карыйбыз.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 7 & 3 & 9\\ 5 & 1 & 3\\ \lambda & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{matrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}5 & 1 & 3\\ -8 & 0 & 0\\ -7 & 0 & 0\\ \lambda-10 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}a_3\\ a_2-3a_3\\ a_1-2a_3\\ b-2a_3\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 24\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}a_2-3a_3\\ 5a_2-7a_3\\ 8a_1-7a_2+5a_3\\ (\lambda-10)a_2-(14-3\lambda)a_3+8b.\end{matrix}$$

Моннан $\{a_1, a_2, b\}$ системасының сызыкча бәйсез икәнен күрәбез. Шуңа күрә $b = (\lambda; 2; 5)$ векторы λ саны нинди булса да a_2 һәм a_3 векторларының сызыкча комбинациясе рәвешендә күрсәтелмәячәк. $L(a_2, a_3) = L(a_1, a_2, a_3)$ булганлыктан, b векторы a_1, a_2, a_3 векторлары аша да күрсәтелми. Димәк, b векторы a_1, a_2, a_3 векторлары аша сызыкча комбинация рәвешендә күрсәтелерлек λ саны юк.

4 нче бүлек

КОМПЛЕКС САННАР ТЕОРИЯСЕ

§ 4.1. Математикада саннар төшенчәсе

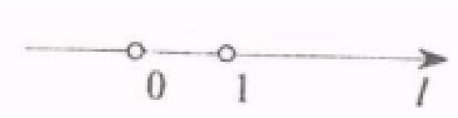
Математиканың үз ихтыяҗлары һәм тормыш мәсьәләләре төрле саннар күплекләрен төзүгә китергән. Саннарның иң әһәмиятлесе – *натураль саннар* күплеге $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Бу саннар ярдәмендә саныйлар һәм күплекләрдә тәртип төшенчәсе кертәләр. Ике натураль санның суммасы һәм тапкырчыгышы натураль сан була. Ләкин $\mathbf{N}$ күплегендә $a + x = b$ тигезләмәсенең кайбер очракларда чишелеше булмый. Мәсәлән, $5 + x = 3$ булса, $x = -2$ – натураль сан түгел. Димәк, ике натураль санның аермасы һәрвакыт натураль сан була алмый. Шуңа күрә $\mathbf{N}$ күплеген киңәйтеп, яңа саннар күплеге төзү мәсьәләсе килеп туа. Бу – *бөтен саннар* күплеге $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm1, \ \pm2, \pm3, \dots\}$. $\mathbf{Z}$ күплегендә саннарны кушарга, алырга һәм тапкырларга мөмкин. Ләкин бу күплектә бүлү гамәле бирелмәгән, ягъни кайбер a, b бөтен саннары өчен $ax = b$ тигезләмәсенең $\boldsymbol{Z}$ күплегендә чишелеше булмый. Мәсәлән, $2x = 3$ булса, $x = \frac{3}{2}$ – бөтен сан түгел.

Әгәр $\boldsymbol{Z}$ күплеген киңәйтеп, бүлү гамәле дә бирелгән күплек төзесәк, ул *рациональ саннар* күплеге $\boldsymbol{Q}$ була: $\boldsymbol{Q} = \left\{t \mid t = \frac{p}{q}, \ p, q \in \boldsymbol{Z}, q \neq 0\right\}$. Мәсәлән, $0 \in \boldsymbol{Q}, 5 \in \boldsymbol{Q}, -2 \in \boldsymbol{Q}, \frac{3}{7} \in \boldsymbol{Q}, \frac{5}{2} \in \boldsymbol{Q}$. Рациональ саннар күплегенә бөтен саннар һәм барлык гади вакланмалар керә. Теләсә нинди рациональ санны чикле яисә чиксез периодик унарлы вакланма рәвешендә күрсәтеп була. Ләкин математикада периодик булмаган чиксез унарлы вакланмалар да бар. Мәсәлән, $\sqrt{2}, \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, π, e. Мондый саннар *иррациональ саннар* дип атала. Рациональ саннарга иррациональ саннарны да өстәгәч, яңа күплек – *реаль саннар* күплеге $\boldsymbol{R}$ барлыкка килә. Димәк, бу күплек барлык (чикле, чиксез, периодик һәм периодик булмаган) унарлы вакланмалардан тора дип әйтергә була.

Югарыда әйтеп киткән саннар күплекләренең төзелешеннән $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ икәнен күрәбез.

§ 4.2. Координатлар турысы һәм саннарның геометрик сурәте

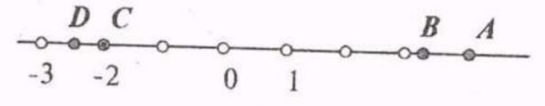
Яссылыкта нинди дер l турысы үткәреп, анда аерым бер нокта – 0 ноктасы, берәмлек кисемтәсен $[0,1]$ алыйк, һәм турының юнәлешен билгелик (рәс.1):



Рәс.1

Бу туры *координатлар турысы* дип атала.

Теләсә нинди натураль, бөтен, рациональ санга координатлар турысында бер нокта тиңдәш булып тора. Мәсәлән, натураль сан 4 бирелгән булсын ди. Координатлар турысында аңа тиндәш ноктаны табу өчен, 0 ноктасыннан башлап, берәмлек кисемтәне бирелгән турыга 4 тапкыр үлчәп салабыз. Шулай итеп табылган $\boldsymbol{A}$ ноктасы 4кә тиңдәш нокта була. $3\frac{1}{4}$ санына тиңдәш булып $\boldsymbol{B}$ ноктасы тора. Аны табу өчен берәмлек кисемтәне координатлар турысына 3 тапкыр салып, тагын берәмлек кисемтәнең $\frac{1}{4}$ өлешен өстибез. $\boldsymbol{C}$ ноктасы -2 санына тиңдәш нокта була. Ул берәмлек кисемтәне ике тапкыр нульдән сул якка (алынган юнәлешка капма-каршы) салып табыла. Нәкъ югарыдагыча, $-2\frac{1}{2}$ санына тиңдәш булган $\boldsymbol{D}$ ноктасын табабыз (рәс.2).



Рәс.2

Шулай итеп, барлык рациональ саннарга тиндәш нокталарны координатлар турысында билгеләп була. Бу вакытта координатлар турысында рациональ саннарга тиңдәш булып тормаган «буш» нокталар да калачак. Әгәр бу турыда барлык реаль саннарны билгеләсәк, табылган нокталар турыны тулысынча тутырачак. Реаль саннарның бу үзлеге аларның өзлексезлеге дип атала. Бу үзлек буенча һәр реаль санга координатлар турысындагы бер нокта һәм, киресенчә, һәр ноктага бер реаль сан тиңдәш була.

§ 4.3. Саннар күплегендәге гамәлләрнең төп үзлекләре

$\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ күплекләрендә саннарны кушу һәм тапкырлау гамәлләре түбәндәге үзлекләргә ия:

1. $a + b = b + a,\ a \cdot b = b \cdot a.$

Бу үзлек *кушу* һәм *тапкырлауның коммутативлык* үзлеге дип атала. Мәктәптә ул *урын алыштыру законы* дип йөртелә.

2. $(a + b) + c = a + (b + c),\ (a \cdot b)\ \cdot c\ =\ a \cdot\ (b \cdot c).$

Бу үзлек *кушу* һәм *тапкырлауның ассоциативлык* үзлеге дип атала. Мәктәптә ул *оештыру законы* буларак билгеле.

3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,\ (a\ +\ b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Бу үзлек тапкырлауның кушуга карата *дистрибутивлык* үзлеге дип атала. Мәктәп укучылары аны *тарату законы* дип беләләр.

$\boldsymbol{Z}$ күплегендә алу гамәле бар, ә $\boldsymbol{Q}$ һәм $\boldsymbol{R}$ күплекләрендә тагын бүлү гамәле дә өстәлә. Димәк, теләсә нинди бөтен a, b саннары өчен $a \pm b,\ a \cdot b$ бөтен сан була.

Әгәр, $a, b \in \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R})$ булса, $a \pm b, a \cdot b,\ \frac{a}{b} \in \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{R})$. ($a$ санын b санына бүлгәндә, $b \neq 0$ дип исәпләнә).

Кушу, алу, тапкырлау гамәлләре бирелгән саннар күплеге *саннар боҗрасы* дип атала. Димәк, $\boldsymbol{Z}$ – саннар боҗрасын төзи. Әгәр саннар күплегендә нульгә тигез булмаган сан булса һәм дүрт арифметик гамәл бирелсә, бу күплек саннар кыры дип атала. Димәк, $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ – *саннар кыры* булалар.

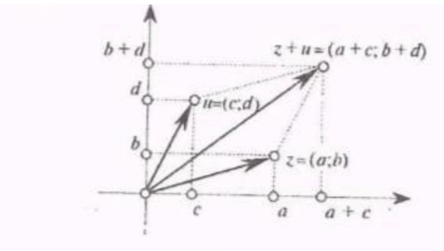
§ 4.4. Комплекс саннар күплеген төзү

Реаль саннар күплеге ничек кенә чиксез күренмәсен, кайбер математик мәсьәләләрне бу күплектә чишеп булмый. Әйтик; $x^2 + 1 = 0$ тигезләмәсенең реаль саннар күплегендә чишелеше юк. Шуңа күрә реаль саннарны киңәйтү мәсьәләсе килеп туа. Координатлар турысында реаль саннардан тыш башка саннарга урын булмау сәбәпле, безгә кирәкле яна саннарның геометрик сурәте яссылык нокталары булырга тиеш. Яссылык нокталарын аларның турыпочмаклы координатлар системасындагы ике координаты (тәртипләштерелгән $(a; b)$ пары) белән биреп була. Шуңа күрә $\{(a; b \mid a, b \in \boldsymbol{R}\ \}$ – яссылыктагы барлык нокталар күплеген тәшкил итә.

Шушы күплеккә тиңдәш булып торган саннар күплеген **C** дип тамгалыйлар һәм *комплекс саннар куплеге* дип атыйлар.

Димәк, $\mathbf{C} = \{z \mid z = (a;b), a, b \in \boldsymbol{R}\}$. Бу күплекнең һәр элементы *комплекс сан* дип атала. Комплекс сан $z = (a;b)$ өчен xOy яссылыгындагы тиңдәш нокта $M(a;b)$ була. $(a;0)$ санына тиңдәш нокта Ox күчәрендә урнашкан. Бу a реаль санына тиңдәш булган нокта булачак. Шуңа күрә $(a;0) = a$ дип килешенгән. Димәк, $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$. Күп очракларда $z = (a;b)$ комплекс санын $\overline{\boldsymbol{OM}}$ векторы белән тиңлиләр. Бу векторның башлангыч ноктасы –$O(0;0)$, очы – $M(\mathrm{a};b)$.

Шулай булганда $z = (a;b)$ һәм $u = (c;d)$ комплекс саннарының суммасы урынына аларга тиңдәш векторларның суммасын алырга була (рәс.3).



Рәс.3

Моннан комплекс саннарны кушу кагыйдасе килеп чыга:

$$(a;\ b) + (c;d) = (a + c;\ b + d).$$

Мәсәлән, $z_1 = (5;-3)$, $z_2 = (-2;4)$ булса, $z_1 + z_2 = (3,1)$ була. $z_1 = (-2;-1)$, $z_2 = (0;1)$ булса, $z_1 + z_2 = (-2,0)$.

C күплегендә кушу гамәле өчен **R** күплегендә үтәлә торган коммутативлык һәм ассоциативлык законнары саклана, ягъни $z + u = u + z$, $(z + u) + v = z + (u + v)$ була, $z \in \boldsymbol{C}, u \in \boldsymbol{C},\ v \in \boldsymbol{C}$.

Комплекс саннарны тапкырлау гамәлен дә, **R** күплегендә үтәлә торган барлык үзлекләр дә сакланырлык итеп билгеләргә кирәк.

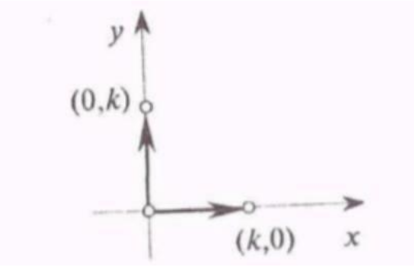
Яссылыктагы векторларны реаль санга тапкырлау гамәле билгеле булганга күрә комплекс саннарны реаль саннарга тапкырлау гамәле дә бирелгән дияргә була.

Димәк, $z = (a;b) \in \boldsymbol{C}$, $k \in \boldsymbol{R}$ булса, $kz = zk = (ak;bk)$.

Комплекс саннар күплегендә $(0;1)$ саны аерым урын алып тора. Бу сан *уйланма берәмлек* дип атала һәм i тамгасы белән тамгалана. Димәк, $(0;1) = i$. Моннан $ik = (0;\ 1) \cdot k = (0;k)$, $ki = (k;\ 0) \cdot i$.

C күплегендә коммутативлык законы утәлгәнлеген исәпкә алсак, $ik = ki$ булырга тиеш.

Димәк, $(k;0) \cdot i = (0;k)$ (рәс.4).



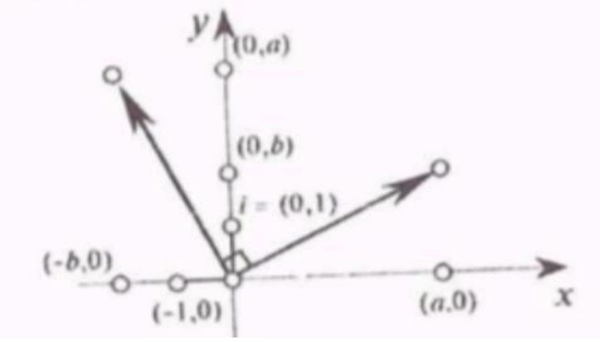
Рәс.4

Шулай итеп, реаль санны i санына тапкырлау – әлеге реаль санга тиңдәш булган $0x$ күчәрендәге векторны уңай юнәлештә $90°$ка бору ул. Әгәр $(k;0)$ векторы урынына $(0;1)$ векторын алсак, без уйланма берәмлекнең квадратын таба алабыз: $i^2 = i \cdot i = (0;1) \cdot i = (-1;0) = -1$.

Моннан шундый нәтиҗә ясыйбыз: **C** *күплегендә кайбер саннарның квадраты тискәре сан була*. **R** күплегендә болай булу мөмкин түгел иде.

Бу вакытта

$(a;b) \cdot i = (a;0) \cdot i + (0;b) \cdot i = (0;a) + b(0;1) \cdot i = (0;a) + b(-1;0) = \quad = (0;a) + (-b;0) = (-b;a)$ (рәс.5).



Рәс.5

Димәк, теләсә нинди комплекс санны уйланма берәмлеккә тапкырлау –аңа тиңдәш векторны уңай юнәлештә $90°$ ка бопу була. Моннан комплекс саннарны тапкырлау кагыйдәсе килеп чыга:

$$z \cdot u = (a;b) \cdot (c;d) = (a;b)\big((c;0) + (0;d)\big) = (a;b) \cdot c + (a;b) \cdot di =$$
$$= (ac;bc) + (ad;\ bd)i = (ac;bc) + (-bd;\ ad) =$$
$$= (ac - bd;\ ad + bc).$$

Мисаллар.

1) $z_1 = (5;-3),\ z_2 = (-2;4)$

$z_1 \cdot z_2 = (5 \cdot (-2) - (-3) \cdot 4; 5 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2)) = (2;26).$

2) $z_1 = (-2;-1), \quad z_2 = (0:1).$

$z_1 \cdot z_2 = \big((-2) \cdot 0 - (-1) \cdot 1;\ (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 0\big) = (1;-2)$

C күплегендәге тапкырлау **R** күплегендә үтәлә торган коммутативлык, ассоциативлык һәм дистрибутивлык законнарына ия, ягьни теләсә нинди комплекс $z,\ u,\ v$ саннары өчен

$z \cdot u = u \cdot z, (z \cdot u) \cdot v = z \cdot (u \cdot v), z \cdot (u + v) = z \cdot u + z \cdot v$

була.

Әгәр, $z = (a;b)$ булса, $a - z$ комплекс санының *реаль* өлеше, b аның *уйланма* өлеше дип атала.

$z = (a;b)$ санына реаль өлешен Rez , ә уйланма өлешен $Imz = b$ дип билгелиләр. Димәк, $Rez = a, Imz = b$.

Күрнәнебезчә, әгәр $Imz = 0$ булса, комлпекс сан $z = (a;0)$ реаль a санына тәңгәл була.

Әгәр, $Rez = 0$ булса, комплекс $z = (0;b)$ саны *уйланма сан* дип атала. Андый санның геометрик сүрәте Oy күчәрендәге нокта була. Димәк, комплекс саннар күплеге – реаль һәм уйланма саннар ярдәмендә төзелгән күплек ул. Шуңа күрә дә ул комплекс саннар күплеге (ягьни катлаулы, гади булмаган) дип атала.

Әгәр дә $(a;\ 0) = a$, һәм $(0;1) = i$, $(0;\ b) = ib$ икәнлеген исәпкә алсак, комплекс $z = (a;b)$ санын $z = (a;0) + (0;b) = \text{a} + ib$ рәвешендә язып була. *Комплекс z санының* болай язылышын аның *алгебраик рәвеше* дип атыйлар.

Мисал өчен, $z_1 = (1;3)$, $z_2 = (3;-2)$, $z_3 = (-1;-2)$, $z_4 = (-2;3)$ булса, аларның алгебраик рәвеше түбәндәгечә була: $z_1 = 1 + 3i,\ z_2 = 3 - 2i,\ z_3 =$

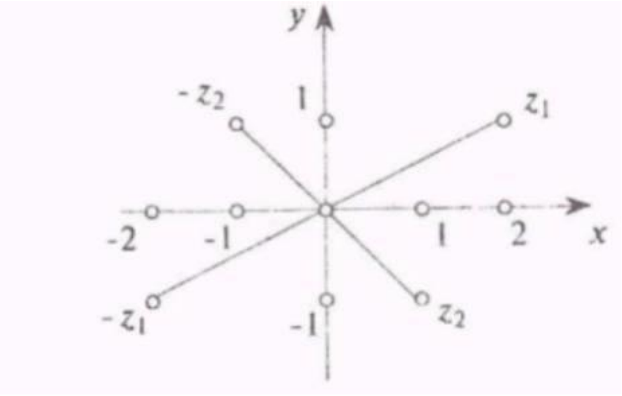
$-1-2i, z_4=-2+3i.$

§ 4.5.Капма-каршы комплекс саннар

$z\ =(a;b)$ булса $(-\,a;\ -b)$ саны z санына *капма – каршы* сан дип атала һәм $(-\,z)$ дип тамгалана. Димәк, $-\,z\,=(-\,a;\ -b)$.

Капма – каршы саннарның төп үзлеге: $z+(-z)=(0;0)=0$. Аларга тиңдәш булган нокталар $(0;0)$ га карата симметрик булалар.

Мәсәлән, $z_1=\ (2;1)$ булса, $-z_1=(-2;-1)$ була, $z_2=\ (1;-1)$ булса, $-z_2=\ (-1;1)$ (рәс.6).



Рәс.6

$z_1=(a;b),\ z_2=(c;d)$ булса, $z_1+(-z_2)=(a;b)+(-c;-d\ )=$
$=(a-c;b-d)$. Бу сан z_1 һәм z_2 саннарының *аермасы* дип атала һәм
$z_1-\ z_2$ дип тамгалана.

Димәк, комплекс саннар күплегендә алу гамәле дә бар икән. Ул түбәндәге кагыйдә буенча үтәлә:

$$(a;b)-(c;d)=(a-c;b-d).$$

Мәсәлән, $z_1=(5;-3),\ z_2=(-2;1)$ булса,
$z_1-z_2=(7;\ -4),\ z_2-\ z_1=(-7;4)$.

§ 4.6. Үзара иярешле комплекс саннар

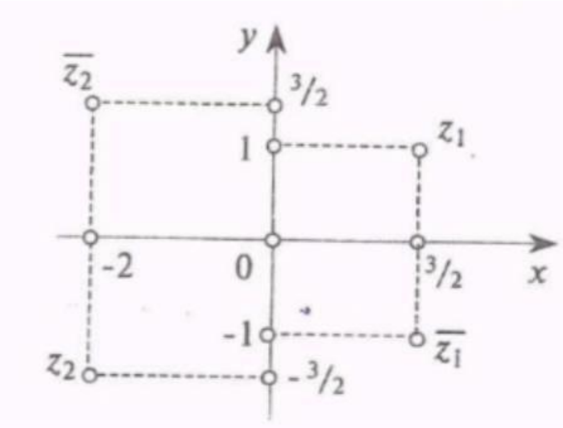
Әгәр $z\ =(a;b)$ булса, $(a;\ -b)$ саны z ка иярешле комплекс сан дип атала һәм $\bar{z}$ дип тамгалана. Димәк, $\bar{z}=(a;\ -b)$. z һәм $\bar{z}$ *узара иярешле комплекс саннар* дип атала. Үзара иярешле комплекс саннарның суммасы һәм тапкырчыгышы һәрвакыт реаль сан була:

$z+\bar{z}=(2a;0)=2a\in \boldsymbol{R}$

$z\cdot\bar{z}=(a^2+b^2;0)=a^2+\ b^2\in \boldsymbol{R}$

Үзара иярешле комплекс саннарга тиңдәш булган нокталар $0x$ күчәренә симметрик урнашалар. Мисал (рәс.7):

$$z_1=\left(\frac{3}{2};1\right),\overline{z_1}=\left(\frac{3}{2};-1\right),z_1=\left(-2;\,-\frac{3}{2}\right),\overline{z_2}=\left(-2;\,\frac{3}{2}\right)$$



Рәс.7

§ 4.7. Үзара кире комплекс саннар

$u=(a;b)\in \boldsymbol{C}, v=(x;y)\in \boldsymbol{C}.$ Әгәр $uv=1$ булса, u,v – *үзара кире комплекс саннар* дип атала.

$$u\cdot v=(a;b)\cdot\ (x;y)=(ax-by;ay+bx)=(1;0).$$

Димәк, $\begin{cases}ax-by=1,\\ bx+ay=0.\end{cases}$ Бу тигезләмәләре системасыннан

$$x=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad y=-\frac{b}{a^2+b^2}$$

икәнен табабыз. Әгәр $u=(a;b)\neq(0;0)$ булса, $u\cdot v=1$ шартын канәгатьләндергән v комплекс саны һәрвакыт табылачак. Аны u^{-1} дип тамгалыйлар.

Димәк, $u^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2};\ -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$ $u\cdot\ \ v^{-1}=\frac{u}{v}$ – бу сан u ны v га бүлгәндә табылган *өлеш* дип атала.

Әгәр $u=(a;b), v=(c,d)$ булса,

$$\frac{u}{v}=(a;b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2};\ -\frac{d}{c^2+d^2}\right)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2};\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)\in \boldsymbol{C}.$$

Шулай итеп, комплекс саннар күплегендә булу гамәле дә кертелә. Мәсәлән, $z_1 = (1;-2), z_2 = (2;3)$ булса,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{1\cdot 2 + (-2)3}{13}; \frac{(-2)2 - 1\cdot 3}{13}\right) = \left(-\frac{4}{13}; -\frac{7}{13}\right).$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{2\cdot 1 + 3(-2)}{5}; \frac{3\cdot 1 - 2(-2)}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right).$$

§ 4.8. Комплекс саннар кыры

C күплегендә дүрт арифметик гамәл – кушу, алу, тапкырлау һәм бүлү билгеләнде. Алда әйткәнебезчә, кушу һәм тапкырлау гамәлләре коммутатив, ассоциатив һәм тапкырлау кушуга карата дистрибутив булалар.

Димэк, **C** күплеге саннар кыры була һәм **Q** ⊂ **R** ⊂ **C.**

§ 4.9. Алгебраик рәвештәге комплекс саннарны кушу, алу, тапкырлау һәм бүлү

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ булсын. Бу вакытта

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i,$ $\qquad$ $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i,$

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) +$

$+ \ (ad + bc)i,$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i,$$

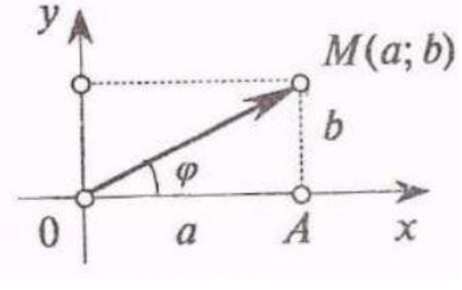
Мәсәлән, $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 + 3i$ булса,

$z_1 + z_2 = 4 + i,$ $\qquad$ $z_1 - z_2 = 2 - 5i,$ $\qquad$ $z_2 - z_1 = -2 + 5i,$

$z_1 \cdot z_2 = 9 + 7i,$ $\qquad$ $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{3}{10} - \frac{11}{10}i$

§ 4.10. Комплекс саннарның тригонометрик рәвеше

Әйткәнебезчә, $z = (a, b)$ санына $\overline{OM}$ векторы тиңдәш була (рәс. 8).



Рәс. 8

$|\overline{OM}| = r$ – бу векторның озынлыгы, ә $\varphi - 0x$ күчәре белән $\overline{OM}$ векторы арасындагы почмак булсын.

r – тискәре булмаган реаль сан, ул турыпочмаклы OAM өчпочмагының гипотенузасы озынлыгы, димәк, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Бу сан z *санының модуле* дип атала һәм $|z|$ итеп тамгалана. Димәк, $r = |z|$. Һәр комплекс $z = (a; b)$ саны өчен $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ бердән-бер тискәре булмаган реаль кыйммәт ала.

φ почмагы z санының *аргументы* дип атала һәм $Arg\, z$ итеп тамгалана. $Arg\, z$ уңай, тискәре, нуль кыйммәтләре алырга мөмкин. Һәр комплекс z өчен $Arg\, z$ ның кыйммәтләре чиксез күп, алар бер-берсеннән $2\mathrm{\pi n}$ радианга ($360\, n$ градуска) аерылып торалар.

0 белән 2π арасындагы почмак *аргументның төп кыйммәте* була һәм $arg\, z$ дип билгеләнә. Димәк, $Argz = \ argz + 2\mathrm{\pi n}, \mathrm{n} \in \boldsymbol{Z}$.

Әгәр $z \neq (0; 0)$ булса, аның аргументын һәрвакыт табып була.

$z = (0; 0)$ санының гына аргументы булмый.

Комплекс санның аргументын табу өчен түбәндәге формулалар кулланыла:

$$cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Моннан аргументның төп кыйммәтен табып була. Күп вакытта аргументны табарга бирелгән санның геометрик сурәте ярдәм итә.

Мисал итеп түбәндәге саннарның модулен һәм аргументын табарбыз:

1) $z = \left(1; -\sqrt{3}\right)$ (рәс.9, a)

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2, \qquad cos\varphi = \frac{1}{2}, \qquad sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Димәк, $Argz = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k,\ argz = \frac{5\pi}{3}$.

2) $z = (-1; -1)$ (рәс.9, *б*)

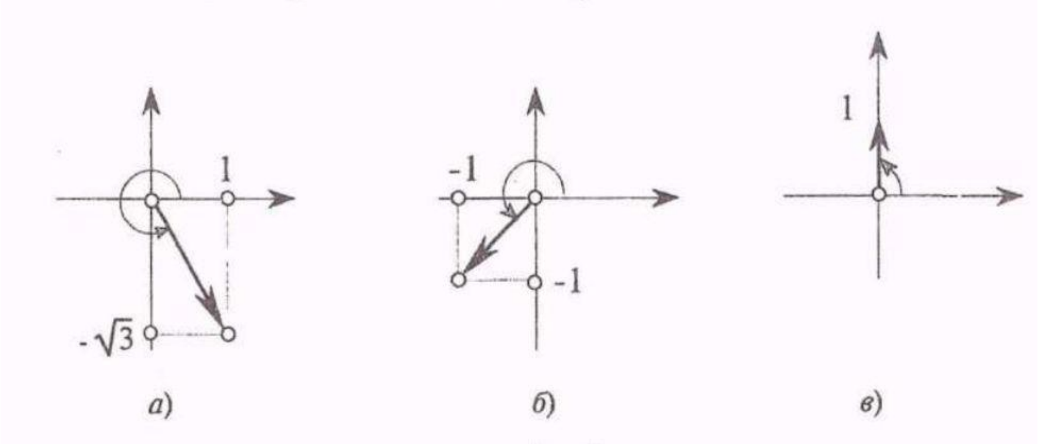
$$r = \sqrt{1 + 1 = }\sqrt{2}, \qquad cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$Argz = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,\ argz = \frac{5\pi}{4}.$$

3) $z = (0; 1)$ (рәс. 9, *в)*

$$r = \sqrt{0+1} = 1, \qquad cos\varphi = 0, \qquad sin\varphi = 1.$$

$$Argz = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ argz = \frac{\pi}{2}.$$



Рәс. 9

$a = rcos\varphi, b = rsin\varphi$ булу сәбәпле, $z = (a; b) = a + bi = r(cos\varphi + $ $+ isin\varphi)$. $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ — z санының тригонометрик рәвеше була.

Югарыдагы мисалларны исәпкә алып, бирелгән саннарны тригонометрик рәвештә курсәтик:

1) $z = \left(1; -\sqrt{3}\right) = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right).$

2) $z = (-1; -1) = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\,sin\frac{5\pi}{4}\right).$

3) $z = (0; 1) = cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}.$

§ 4.11. Тригонометрик рәвештә бирелгән комплекс саннарны тапкырлау һәм бүлү

$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\varphi_1), z_2 = r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\varphi_2)$ булсын.

Ул вакытта

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(cos\varphi_1 + i\,sin\varphi_1) \cdot r_2(cos\varphi_2 + i\,sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2((\,cos\varphi_1 \cdot cos\varphi_2 - sin\varphi_1 \cdot sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\,cos\varphi_1 \cdot sin\varphi_2 - cos\varphi_2 \cdot sin\varphi_1)) =$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Димәк, тригонометрик рәвештә язылган комплекс саннарны тапкырлау өчен аларның модульләрен тапкырлыйлар, ә аргументларын кушалар.

Ягъни $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \arg(z_1 \cdot z_2) = argz_1 + argz_2$.

Әгәр $z_2 = i = cos 90° + i\, sin 90°$ - булса,

$$z_1 \cdot i = r_1(\cos(\varphi_1 + 90°) + i \sin(\varphi_1 + 90°)).$$

Бу безгә билгеле булган нәтиҗә: $z_1 \cdot i$ векторы z_1 векторын уңай юнәлештә 90° ка борып табыла. Хәзер $\frac{z_1}{z_2}$ не табыйк:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1) \cdot (cos\varphi_2 - i\, sin\varphi_2)}{(cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2) \cdot (cos\varphi_2 - i\, sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Димәк, комплек сан z_1не z_2гә бүлер өчен, z_1нең модулен z_2 нең модуленә бүләләр һәм z_1нең аргументыннан z_2 нең аргументын алалар. Шулай итеп,

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| , arg\frac{z_1}{z_2} = argz_1 - argz_2.$$

Мисал: $z_1 = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\, sin\frac{2\pi}{3}\right), z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}\right)$ булса,

$z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_1}$ саннарын табабыз.

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i \sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

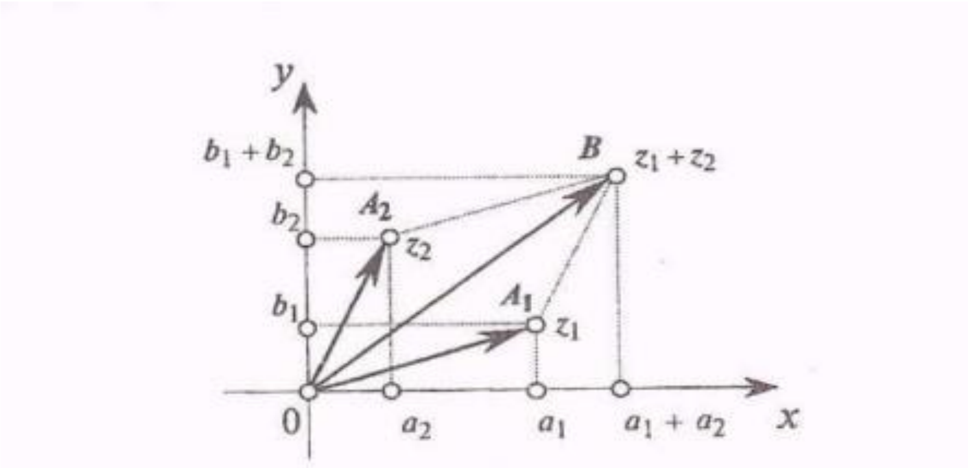
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right).$$

Гадәттә, аргументның төп кыйммәтен алалар. Шуңа күрә соңгы мисалны дәвам итәргә була:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i \sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

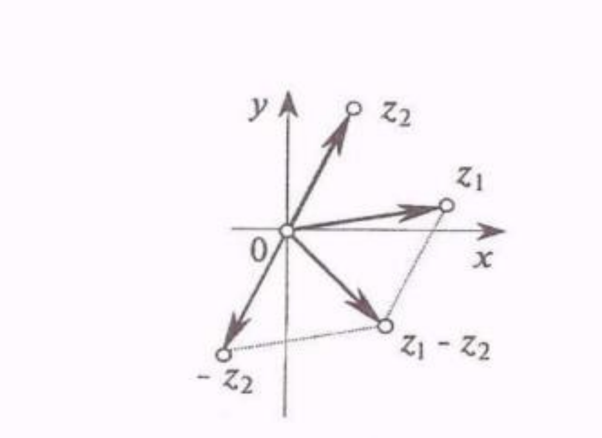
§ 4.12. Комплекс саннарны кушу, алу, тапкырлау һәм бүлүнең геометрик мәгънәсе

$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ өчен $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.



Рәс. 10

Күргәнебезчә, $z_1 + z_2$ санының геометрик сурәте – яклары z_1 һәм z_2 векторлары булган параллелограммның диагонале, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ булганга күрә, $z_1 - z_2$ яклары z_1 һәм $(-z_2)$ булган параллелограммның диагонале була (рәс.10,11).



Рәс. 11

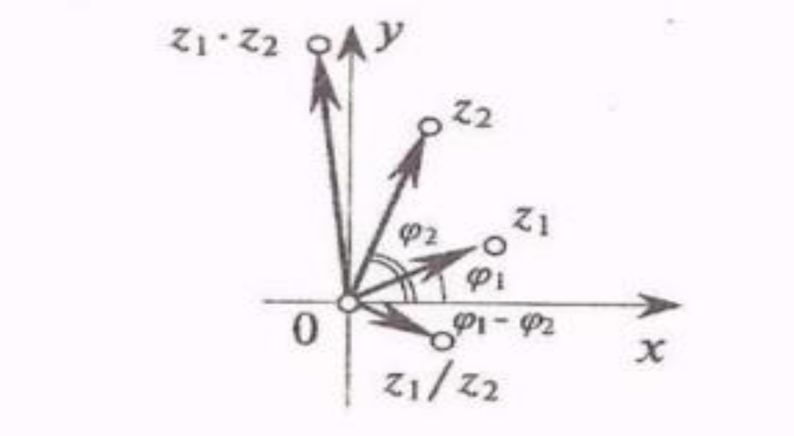
Тапкырлау һәм бүлүнең геометрик мәгънәсе бирелгән саннарны тригонеметрик рәвештә алсак аңлаешлырак була. Шуңа күрә $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ булсын. Белгәнебезчә, $|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$.

Димәк, $z_1 \cdot z_2$ нең геометрик сурәтен табу өчен $0x$ күчәре белән $(\varphi_1 + \varphi_2)$ почмагы ясап торучы $(0; 0)$ ноктасына чыккан нур алып анда озынлыгы $r_1 \cdot r_2$ булган радиус – вектор төзибез.

$\frac{z_1}{z_2}$ гә тиңдәш булган радиус – векторны табу өчен, $0x$ күчәре белән

$(\varphi_1 - \varphi_2)$ почмагы ясап торучы нур алып, анда озынлыгы $\frac{r_1}{r_2}$ булган радиус – вектор төзибез.

Безнең мисалда $r_1 = 1{,}5$, $r_2 = 2$. Шуңа күрә $r_1 \cdot r_2 = 3$, $\frac{r_1}{r_2} = 0{,}75$ (рәс.12).



Рәс. 12

§ 4.13. Комплекс саннарны дәрәҗәгә күтәрү

Комплекс саннарны дәрәҗәгә күтәрүне тригонометрик рәвештә эшләү уңайлырак.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), n \in$ $\boldsymbol{N}$ булса, $z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin n\varphi)$.

Бу ***Муавр*** формуласы. Аны математик индукция юлы белән исбатлыйлар. $n = 1$ булса,

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Димәк, $n = 1$ өчен формула дөрес була. $n = k$ булганда, формула дөрес дип фараз итик, ягъни

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$$

булсын.

Ул вакытта

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^{k+1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^k =$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) =$$

$$= r^{k+1}(\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi).$$

Димәк, Муавр формуласы $n = k + 1$ булганда да дөрес.

Шулай итеп, бу формуланың дөреслеге теләсә нинди натураль дәрәҗә күрсәткече өчен исбатланды.

Искәрмә. Муавр формуласы теләсә нинди бөтен дәрәҗә күрсәткече өчен дә дөрес була.

$n = 0$ булса, $z^0 = 1, r^0(\cos 0 + i\sin 0) = 1.$

Димәк, $1 = 1$ – формула дөрес.

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{r^n}(\cos(0 - n\varphi) + i\sin(0 - n\varphi)) = r^{-n}(\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\,\varphi).$$

Моннан Муавр формуласының тискәре дәрәҗә күрсәткече өчен дә дөреслеге килеп чыга.

Мисаллар:

$$1)\ z^5 = (1 - i)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^5 =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{35\pi}{4} + i\sin\frac{35\pi}{4}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi + 4\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi + 4\cdot 2\pi\right)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -4(1 - i)\,.$$

$$2)\ z^{-5} = (1 - i)^{-5} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{-5} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^5}\left(\cos(-5)\cdot\frac{7\pi}{4} + i\sin(-5)\cdot\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^5}\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-35\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}^5}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{8}(1 + i)\,.$$

§ 4.14. Комплекс саннар күплегендә тамыр алу

Әгәр натураль n өчен $u^n = z$ булса, u комплекс саны z санынннан n *нче дәрәҗәдәге тамыр* дип атала, һәм $u = \sqrt[n]{z}$ дип тамгалана.

$z = r(\cos\varphi + + i\sin\varphi), u = \varsigma(\cos\theta + i\sin\theta)$ булсын. Ул вакытта

$\varsigma^n(\cos n\theta + i\sin\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Димәк, $\varsigma^n = r$. Косинус һәм синусның периоды 2π булу сәбәпле $n\theta = \varphi + 2kn, k \in \boldsymbol{Z}$. Моннан, ς һәм θ өчен $\varsigma = \sqrt[n]{r}, \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n}, k \in \boldsymbol{Z},$ формулалары табыла.

Күргәнебезчә, ς конкрет реаль сан була, θ саны k нинди булуга карап төрле кыйммәт ала.

Әйтик, k –ниндидер бөтен сан булсын.

Аны n га булеп $k = nq + q_0$ рәвешенә китереп була, монда $q \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le q_0 \le n - 1$, чөнки q_0 саны k ны n га булгәндәге калдык.

Ул вакытта

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq + q_0)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2q_0\pi}{n} + 2\pi q = \theta_{q_0} + 2\pi q.$$

Димәк,

$$\cos\theta_k = \cos(\theta_{q_0} + 2\pi q) = \cos\theta_{q_0},$$

$$sin\,\theta_k = sin(\theta_{q_0} + 2\pi q) = \sin\theta_{q_0}.$$

Шуна күрә,

$u_k = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = \sqrt[n]{r}(\cos\theta_{q_0} + i\sin\theta_{q_0}) = u_{q_0}$,
$0 \le q_0 \le n - 1$.

Димәк, k урынына $0, 1, \ldots, n-1$ саннарын куйганда, z нең n нче дәрәҗәдәге n тамыры табыла. k урынына башка нинди генә бөтен сан куйсак та, яңа тамыр табылмаячак, ул элек табылган тамырларның берсе белән тәңгәл киләчәк.

Югарыда әйткәннәрдән нәтиҗә ясап, комплекс саннан тамыр алу формуласын китерик:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Бу формула буенча табылган n кыйммәтенең модульләре бер үк, аргументлары һәр адымда $\frac{2\pi}{n}$га артып бара. Димәк, алар үзәге $(0; 0)$ ноктасында, радиусы $\sqrt[n]{r}$ булган әйләнәдә яталар һәм бу әйләнәне n тигез өлешкә бүләләр.

Мисаллар

$$1)\ \sqrt[6]{1-i} = \sqrt[6]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} =$$

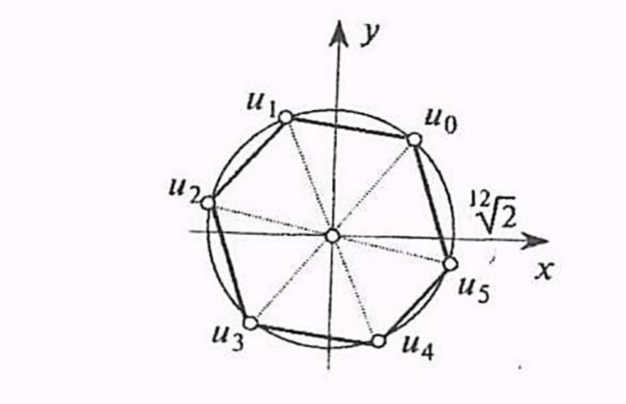
$$= \sqrt[6]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{4} + 2\pi k}{6}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$$u_0 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{24} + i\sin\frac{7\pi}{24}\right),\ u_3 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{24} + i\sin\frac{31\pi}{24}\right),$$

$$u_1 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{24} + i\sin\frac{15\pi}{24}\right),\ u_4 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{39\pi}{24} + i\sin\frac{39\pi}{24}\right),$$

$$u_2 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{24} + i\sin\frac{23\pi}{24}\right),\ u_5 = \sqrt[12]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{24} + i\sin\frac{47\pi}{24}\right).$$

Бу 6 тамыр радиусы $\sqrt[12]{2}$ булган әйләнә белән камалган төзек алтыпочмакның түбәләре булып тора (рәс. 13).



Рәс. 13

$$2)\ \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$$

$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$

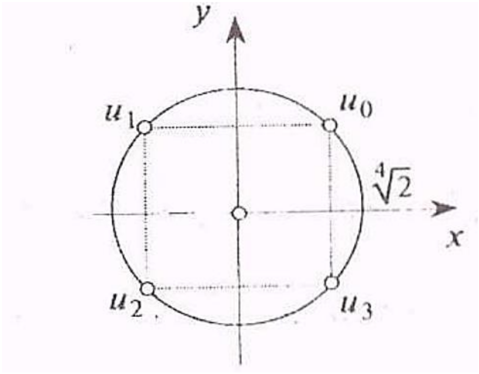
$$u_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i,$$

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i,$$

$$u_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i,$$

$$u_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$ – радиусы $\sqrt{2}$ булган әйләнә белән камалган квадратның түбәләре (рәс. 14).



Рәс. 14

Комплекс санардан тамыр алганда, кайвакытта бер үзлектән файдалану эшне җиңеләйтә.

Безгә $\sqrt[n]{z_1 \cdot z_2}$ табарга кирәк булсын ди. Әйтик, t – $\sqrt[n]{z_1}$ нең ниндидер бер кыйммәте, $u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n-1}$ – $\sqrt[n]{z_2}$ нең барлык кыйммәтләре. Ул вакытта $t \cdot u_0,\ t \cdot u_1,\ \ldots,\ t \cdot u_{n-1}$ – $\sqrt[n]{z_1 \cdot z_2}$ нең барлык кыйммәтләре була. Моның шулай икәнен исбатлап китик:

1. $t \cdot u_0,\ t \cdot u_1,\ \ldots,\ t \cdot u_{n-1}$ саннары бер-берсенә тәңгәл килмиләр, чөнки $u_s \neq u_t$.

2. $(tu_s)^n = t^n u_s^n = z_1 \cdot z_2$.

Димәк $t \cdot u_s = \sqrt[n]{z_1 \cdot z_2}, s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n - 1.$ Ягъни $\{tu_0,\ tu_1,\ \ldots, tu_{n-1}\}$ – $(z_1 \cdot z_2)$ нең *n* нче дәрәҗә тамырлары, аларның саны *n*. Димәк, бу күплектә барлык *n* тамыр да бар.

Мисал.

$\sqrt[4]{-64} = \sqrt[4]{16 \cdot (-4)}$ икәнен исәпкә алсак,

$\sqrt[4]{16} = 2, \sqrt[4]{-4} = \{1 + i,\ -1 + i,\ -1 - i,\ 1 - i\}$ булу сәбәпле,

$\sqrt[4]{-64} = \{2 + 2i,\ -2 + 2i,\ -2 - 2i,\ 2 - 2i\}.$

§ 4.15. Комплекс саннардан квадрат тамыр алу

Югарыда китерелгән формула комплекс саннан теләсә-нинди дәрәҗәдәге тамыр алу өчен яраклы. Аның буенча тамыр алганда, бирелгән санны һәрвакыт тригонометрик рәвешкә китерергә кирәк. Квадрат тамыр алуны алгебраик рәвештә дә эшләп була.

$z = a + bi$ булсын. Безгә $\sqrt{a + bi} = x + iy$ санын табарга кирәк. Биредә x, y — билгесез реаль саннар. Тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәрик:

$$a + bi = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Ул вакытта

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Бу системаны чишеп, x һәм y ны табабыз.

Шулай итеп, $\sqrt{a + bi} = x + iy$ табылаячак.

Мисаллар

1) $z = 3 - 4i, \ \sqrt{3 - 4i} = x + iy$ ны табарга кирәк.

x һәм y билгесезләренә карата система төзибез:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

$y = -\frac{2}{x}$ ны беренче тигезләмәгә куеп, x ка карата биквадрат тигезләмә табабыз:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0. \ x^2 = t \text{ булса, } t^2 - 3t - 4 = 0$$

тигезләмәсенең чишелешләре: $t_1 = -1, t_2 = 4$.

$x^2 = -1$, була алмый, димәк $x^2 = 4$. Моннан $x_1 = 2, \ x_2 = -2$. Бу вакытта $y_1 = -1, y_2 = 1$.

Димәк $\{2 - i, \ -2 + i\} = \sqrt{3 - 4i}$.

2) $z = -24 - 10i$. $\sqrt{-24 - 10i} = x + iy$ ны табыйк.

Бу мисалда безгә кирәк система мондый була:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -24, \\ 2xy = -10. \end{cases}$$

Аның чишелешләре: $x_1 = -1, y_1 = 5, x_2 = 1, y_2 = -5$.

Димәк, $\sqrt{-24-10i}=\{-1+5i, 1-5i\}$.

Алгебраик рәвештә квадрат тамыр алу комплекс саннар күплегендә квадрат тигезләмәләр чишкәндә файдаланыла.

Әйтик, безгә $z^2+2z+1-2i=0$ тигезләмәсен чишеп, җавапны алгебраик рәвештә язарга кирәк булсын. Квадрат тигезләмәнең тамырларын табу формуласыннан $z_{1,2}=-1\pm\sqrt{2i}$ табабыз.

z_1, z_2 не алгебраик рәвештә күрсәтергә кирәк.

$\sqrt{2i} == x+iy$ булсын. Бу тигезләмәнең ике ягын да квадратка күтәреп, түбәндәге системаны төзик: $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ 2xy=2. \end{cases}$

Бу системаның чишелешләрен табабыз:

$$x=\frac{1}{y}, \qquad \frac{1}{y^2}-y^2=0, \quad \text{ягъни} \quad y^4=1,\ y^2=1,\ y=\pm1.$$

Бу вакытта $x=\pm1$. Димәк, $\sqrt{2i}=\pm(1+i)$. Шуңа күрә

$$z_1=-1+1+i=i, \qquad z_2=-1-1-i=-2-i$$

бирелгән тигезләмәнең алгебраик рәвештәге чишелешләре.

§ 4.16. Комплекс саннар күплегендә бернең *n* нче дәрәҗә тамырлары

Билгеле формула буенча

$$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k=0,1,\dots,n-1.$$

Димәк,

$$\varepsilon_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

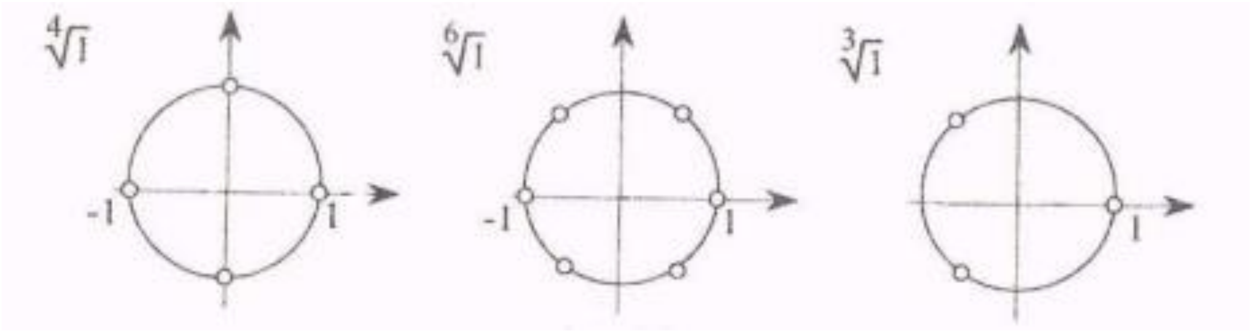
$$\dots$$

$$\varepsilon_{n-1}=\cos\frac{2\pi(n-1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(n-1)}{n}.$$

комплекс саннар күплегендә $\sqrt[n]{1}$ нең n кыйммәте.

Аларның берсе һәрвакыт 1 гә тигез, ә калганнары радиусы 1, үзәге $(0;0)$ булган әйләнәне тигез n өлешкә бүлеп урнашканнар. Шуңа күрә бердән комплекс тамыр кыйммәтләре узара иярешле була.

Мәсәлән, 15 нче рәсемдә $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[3]{1}$ нең кыйммәтләре күрсәтелгән.



Рәс.15

n җөп сан булса, $\sqrt[n]{1}$ нең ике реаль тамыры бар (1 һәм -1), n – так сан булса, $\sqrt[n]{1}$ нең бер генә реаль тамыры була (1).

Искәрмә. $\sqrt[n]{z}$ нең барлык кыйммәтләрен $\sqrt[n]{1}$ нең кыйммәтләре аша табып була. Моның өчен $\sqrt[n]{z}$ нең нинди дә булса бер кыйммәте булган β ны һәм $\sqrt[n]{1}$ нең барлык кыйммәтләрен $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ не табабыз.

Ул вакытта $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z \cdot 1} - \{\beta \cdot \varepsilon_0, \beta \cdot \varepsilon_1, \dots, \beta \cdot \varepsilon_{n-1}\}$.

Мисал.

$\sqrt[3]{8}$ не табу өчен $\sqrt[3]{8}$ нең бер кыйммәтен һәм $\sqrt[3]{1}$ нең барлык кыйммәтләрен эзлибез:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Ул вакытта $\sqrt[3]{8} = \{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$.

§ 4.17. Бердән төп тамырлар

$\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ – бердән n-нче дәрәҗә тамырларының барлык кыйммәтләре булсын.

Әгәр $\alpha^n = 1$ һәм $\{\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ булса, α бердән n нче дәрәҗәдәге *төп тамыр* дип атала.

Мисал.

$\{1, -1, i, -i\}$ – дүртенче дәрәҗә тамырларының барлык кыйммәтләре. $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i$ булу сәбәпле, $\{i^0, i, i^2, i^3\} = \{1, -1, i, -i\}$.

Димәк, i бердән 4 нче дәрәҗәдәге төп тамыр була.

Төп тамырларның шундый үзлекләре бар:

1) Әгәр α бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамыр булса, $\alpha^1 \neq 1, \alpha^2 \neq 1, \dots, \alpha^{n-1} \neq 1$.

Исбатлау. α бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамыр булу сәбәпле, $\{\alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$ – бердән n нче дәрәҗә тамырның барлык кыйммәтләре. Бу күплеккә кергән элементларның саны n булганга күрә, алар арасында бер-берсенә тәңгәл килгәннәре юк.

Димәк, $\alpha \neq 1, \alpha^2 \neq 1, \dots, \alpha^{n-1} \neq 1$.

2) Әгәр $\alpha^n = 1$ һәм $\alpha \neq 1, \alpha^2 \neq 1, \dots, \alpha^{n-1} \neq 1$ булса, α бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамыр була.

Исбатлау. $M = \{\alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}\}$, $M_1 = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$. Безгә $M = M_1$ икәнен күрсәтергә кирәк. $(\alpha^k)^n = (\alpha^n)^k = 1$, $k = 0,1, \dots, n-1$. Димәк, M күплегендәге барлык саннар бердән n нче дәрәҗә тамырның кыйммәтләре. Әгәр алар арасында бер-берсенә тәңгәл килгәннәре булмаса, $M = M_1$ булачак. Бирелеш буенча $\alpha \neq 1, \alpha^2 \neq 1, \dots, \alpha^{n-1} \neq 1$. Әгәр $\alpha^k = \alpha^l$.
$0 < l < k < n$ булса, $\alpha^{k-l} = \alpha^0 = 1$. Монда $0 < k - l < n$. Шарт буенча болай булу мөмкин түгел. Нәкъ шулай итеп $l > k$ очрагында да капма-каршылыкка киләбез. Димәк, әгәр $k \neq l$ һәм $0 < k, l < n$ булса, $\alpha^k \neq \alpha^l$. Шулай булгач, M күплеге бердән n нче дәрәҗә тамырның барлык кыйммәтләреннән төзелгән күплек, ягъни $M = M_1$. Билгеләмә буенча бу – α – бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамыр дигән сүз.

Бу ике үзлекне берләштереп, түбәндәге нәтиҗәне ясый алабыз.

α – бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамыр булсын өчен $\alpha \neq 1, \alpha^2 \neq$ $\neq 1, \dots, \alpha^{n-1} \neq 1$ шарты үтәлүе кирәк һәм шул җитә.

Шушы нәтиҗәне кулланып, бердән 4 нче дәрәҗәдәге төп тамырлар табыйк. $\sqrt[4]{1} = \{1, -1, i, -i\}$. Бу мисалда $n = 4$. Димәк, бирелгән кыйммәтне 1,2,3 дәрәҗәләргә күтәреп карау кирәк. $\alpha = 1$ булсын, $1^1 = 1$. Димәк, 1 төп тамыр була алмый. $\alpha = -1$ булса, $(-1)^{\,2} = 1$. Димәк, (-1) шулай ук төп тамыр түгел.

$\alpha = i$ булсын $i^1 = i \neq 1, i^2 = -1 \neq 1, i^3 = -i \neq 1$. Димәк, i – бердән 4 нче дәрәҗәдәге төп тамыр (без моның шулай икәнен билгеләмә буенча тапкан идек инде).

$\alpha = -i$ булса, $(-i)^1 = -i \neq 1, (-i)^2 = -1 \neq 1, (-i)^3 = i \neq 1$. Димәк, $(-i)$ – бердән 4 нче дәрәҗәдәге төп тамыр.

Бу мисалдан күренгәнчә, бердән n нче дәрәҗәдәге төп тамырлар берничә булырга мөмкин. Шундый үзлек бар:

Әгәр $n \geq 2$ булса, иң кимендә бер n нче дәрәҗәдәге төп тамыр була.

Исбатлау. Бердән n нче дәрәҗә тамырның барлык кыйммәтләре $\varepsilon_k = = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k = 0,1,\dots,n-1$ формуласы буенча табыла. $k = 1$ булгандагы кыйммәт n нче дәрәҗәдәге төп тамыр була, чөнки $\varepsilon_1^0 = 1 = \varepsilon_0, \varepsilon_1^1 = = \varepsilon_1, \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_1^{n-1} = \varepsilon_{n-1}$ (төп тамырның билгеләмәсен кара!). Димәк, иң кимендә бер төп тамыр һәрвакыт табылачак.

ТАТАРЧА-РУСЧА ТЕРМИНОЛОГИК СҮЗЛЕК

Татарча	**Русча**
А	
АБСЦИССА	абсцисса
АЕРМА	разность
симметрик ~	симметрическая разность множеств
векторларының аермасы	разность векторов
АКСИОМА	аксиома
математик индукциясе аксиома	аксиома математической индукции
АКСИОМАТИК	аксиоматический
~ метод	аксиоматический метод
АЛГЕБРА	алгебра
күплекләр алгебрасы	алгебра множеств
элементар ~	элементарная алгебра
АЛГЕБРАИК	алгебраический
комплекс санның ~ рәвеше	алгебраическая форма записи комплексного числа
АЛУ	вычитание
комплекс саннарны алу	вычитание комплексных чисел
АЛЫШТЫРУ	замена
АЛЫШТЫРЫРГА	заменять
x-ны **y**-ка алыштырыйк	заменим **x** на **y**
АНАЛИЗ	анализ
АНАЛИТИК	аналитический
~ рәвештә	аналитически
АППЛИКАТА	аппликата
АРГУМЕНТ	аргумент
комплекс санның аргументы	аргумент комплексного числа
АСИМПТОТА	асимптота

АССОЦИАТИВЛЫК	ассоциативный
кушуның ~ законы	ассоциативный закон сложения
тапкырлауның ассоциативлык законы	ассоциативный закон умножения
Б	
БАЗИС	базис
сызыкча пространствоның стандарт базисы	стандартный базис линейного пространства
БАШЛАНГЫЧ	начало
координаталар башлангычы	начало системы координат
БЕРЛӘШҮ	объединение множеств
БЕРДӘЙ	тождественный
БЕРДӘЙЛЕК	тождество
БИРҮ ЫСУЛЫ	способ задания
бинар бәйләнешне ~	способ задания бинарного отношения
функция ~	способ задания функции
күплекне ~	способ задания множества
БИЕКЦИЯ	биекция
БИЛГЕЛӘМӘ	определение
БОЖРА	кольцо
саннар божрасы	числовое кольцо
БӘЙЛӘНЕШ	отношение
бинар ~	бинарное отношение
функциональ ~	функциональное отношение
рефлексив ~	рефлексивное отношение
антирефлексив ~	антирефлексивное отношение
симметрик ~	симметричное отношение
антисимметрик ~	антисимметричное отношение
транзитив ~	транзитивное отношение

бәйле ~	связное отношение
эквивалентлык бәйләнеше	эквивалентное отношение
тәртип бәйләнеше	отношение порядка
катгый булмаган тәртип бәйләнеше	нестрогий порядок
катгый тәртип бәйләнеше	строгий порядок
сызыкча тәртип бәйләнеше	линейный порядок
БӨТЕН	целое
~ сан	целое число
БҮЛЕНҮЧЕ	делимое
БҮЛЕНҮЧӘНЛЕК	делимость
БҮЛҮ	деление
комплекс саннарны ~	деление комплексных чисел
икегә ~	деление на два
буынлап (тигезләмәнең барлык буыннарын) ~	делить (все члены уравнения) почленно на ...
калдыксыз ~	делить без остатка
кисәкләргә ~; буынлау	делить на части; вычленять
бербөтен итеп ~	делить нацело
урталай ~	делить пополам; сокращать наполовину
почмакны урталай ~	делить угол пополам
калдыксыз бүленү	делиться без остатка
БҮЛҮЧЕ	знаменатель
В	
ВАКЛАНМА	дробь
вакланмалы өлеш	дробная часть
ВАКЫТ	время
ВАРИАНТ	вариант

ВЕКТОР	вектор, векторная
арифметик ~	арифметический вектор
n-үлчәмле арифметик ~	n-мерный арифметический вектор
векторының координаталары	координаты вектора
тигез векторлар	равные вектора
нуль-вектор	нуль-вектор
капма-каршы вектор	противоположный вектор
векторларының сызыкча комбинациясе	линейная комбинация векторов
~ зурлык	векторная величина
Г	
ГАМӘЛ	операция
алу гамәле	операция вычитания
икеле саннар белән гамәле	операция с двоичными числами
кушу гамәле	операция сложения
арифметик ~	арифметическая ~
йөзүче өтер белән арифметик гамәлләр	арифметические операции с плавающей запятой
билгеләнгән өтер белән арифметик гамәлләр	арифметические операции с фиксированной запятой
кисешмә табу гамәле	операция нахождения пересечения множеств
өстәмә табу гамәле	операция нахождения дополнения множества
берләшмә табу гамәле	операция нахождения объединения множеств
ГЕОМЕТРИК	геометрически
~ рәвештә сүрәтләгез	изобразите геометрически
комплекс санның ~ мәгънәсе	геометрический смысл комплексного числа

ГРАФ	граф
ГРАФИК	график
~ юл белән	графически
y-ның – *x*-тан бәйлелеге графигы	график зависимости y от x
Д	
ДЕДУКЦИЯ	дедукция
ДИЗЪЮНКЦИЯ	дизъюнкция
ДӘРӘҖӘ	степень
дәрәҗәгә күтәрү	возведение в степень
И	
ИМПЛИКАЦИЯ	импликация
ИНДУКЦИЯ	индукция
~ аксиомасы	аксиома индукции, принцип математической индукции
индукциянең базасы	база индукции
математик ~	математическая индукция
математик ~ ысулы	метод математической индукции
ИНТЕРВАЛ	интервал
йомык ~, кисемтә	закрытый интервал, отрезок
ачык ~, аралык	открытый интервал, промежуток
ярымачык ~	полуоткрытый интервал
ярымйомык ~	полузакрытый интервал
ИНТЕРПРЕТАЦИЯ	интерпретация
ИНЪЕКЦИЯ	инъекция
ИРРАЦИОНАЛЬ	иррациональное
~ сан	иррациональное число
ИСБАТЛАУ	доказательство, доказывать
төгәл ~ бирү	давать строгое доказательство

исбатлаусыз кабул итү	принимать без доказательства
тигезсезлекне туры алгебраик ~	прямое алгебраическое доказательство неравенства
фикернең дөреслеген ~	доказывать истинность утверждения
ике тигезсезлекнең эквивалент булмавын ~	доказывать неэквивалентность двух неравенств
теореманы киресеннән чыгып ~	доказывать теорему от противного
... булуын исбатлап карыйк	попытаемся доказать, что ...
ИСКӘРМӘ	примечание
Й	
ЙОМЫКЛЫК ҮЗЛЕГЕ	свойство замкнутости
К	
КАБЫРГА	ребро
КАПМА-КАРШЫ	противоположный
капма-каршы сан	противоположное число
капма-каршы комплекс сан	противоположное комплексное число
графның кабыргасы	ребро графа
КВАДРАТ	квадрат, квадратический
~ тамыр алу	извлечение квадратного корня
КВАНТОР	квантор
гомумилек ~	квантор общности
булу ~	квантор существования
КИМЕТҮ	исключение
билгесезләрне ~	исключение неизвестных
КИСЕШҮ	пересечение множеств
КЛАСС	класс
эквивалентлык классы	класс эквивалентности
КОМПЛЕКС	комплексное
~ сан	комплексное число

капма-каршы ~ сан	противоположное комплексное число
үзара иярәшле ~ сан	сопряженные комплексные числа
үзара кире ~ сан	обратные комплексные числа
~ саннар кыры	поле комплексных чисел
~ саны дәрәҗәгә күтәрү	возведение в степень комплексного числа
КОМПОЗИЦИЯ	композиция
функцияләр композициясе	композиция функций
КОНЪЮНКЦИЯ	конъюнкция
КОТАНГЕНС	котангенс
КОСИНУС	косинус
КУЛЛАНЫШ	применение
КУШУ	сложение
комплекс саннарны кушу	сложение комплексных чисел
КЫЙММӘТ	величина, значение
арифметик ~	арифметическое значение
иң зур ~	наибольшее значение
иң кечкенә ~	наименьшее значение
мөмкин саналган ~	допустимое значение
төп ~	главное значение
якынча ~	аппроксимация
абсолют ~	абсолютное значение
~ бирү	задавать значение
үзгәрешлегә ~ бирү	присваивать значение переменной
эзлеклелекнең n-нчы буыны кыйммәте	значение n-го члена последовательности
КЫР	поле
саннар кыры	числовое поле

КҮНЕГҮ	упражнение
КҮПЛЕК	множество
тигез куплекләр	равные множества
күплеккә керү	принадлежать множеству
күплекне төзү	построение множества
бу күплекләр кисешмиләр	эти множества не пересекаются
буш ~	пустое множество
универсаль ~	универсальное множество
чикле ~	конечное множество
чиксез ~	бесконечное множество
саннар күплеге	числовое множество
кече ~, күплекчәсе	подмножество
натураль саннар күплеге	множество натуральных чисел
бөтен саннар күплеге	множество целых чисел
иррациональ саннар күплеге	множество иррациональных чисел
рациональ саннар күплеге	множество рациональных чисел
реаль саннар күплеге	множество действительных чисел
комплекс саннар күплеге	множество комплексных чисел
тәртипләштерелгән ~	упорядоченное множество
КҮРСӘТМӘ	указание
Л	
ЛОГИК ЗАКОНЫ	закон математической логики
идемпотентлык ~	закон идемпотентности
өченчене инкарь итү ~	закон исключения третьего
коммутативлык ~	переместительный (коммутативный) закон
ассоциативлык ~	сочетательный (ассоциативный) закон
дистрибутивлык ~	распределительный (дистрибутивный)

	закон
Де Морган ~	закон де Моргана
контрапозиция ~	закон контрапозиции (правило перевертывания)
икетелгән кирү кагу ~	закон двойного отрицания
М	
МАКСИМУМ	максимум
МАТРИЦА	матрица
бакчасыман ~	ступенчатая матрица
МИНИМУМ	минимум
МИСАЛ	пример
МОДУЛЬ	модуль
комплекс санның модуле	модуль комплексного числа
МӘСЬӘЛӘ	задание
мөстәкыйль чишү өчен мәсьәләләр	задания для самостоятельной работы
МӨМКИН САНАЛГАН	допустимый
~ чикләмә	допустимый предел
~ чик	граница допуска
~ фараз чиге	допуск
МӨМКИНЛЕК	возможность
Н	
НОКТА	точка
НӘТИҖӘ	следствие
О	
ОРДИНАТА	ордината
ОРЫНМА	касательная
ОРЫНУ	касаться
П	

ПРЕДИКАТ	предикат
ПРОСТРАНСТВО	пространство
n-үлчәмле арифметик вектор пространствосы	арифметическое n-мерное векторное пространство
Р	
РАДИУС	радиус
РАНГ	ранг
РАСЛАУ	утверждение
исбатлана торган ~	доказываемое утверждение
РАЦИОНАЛЬ	рациональное
~ сан	рациональное число
РЕАЛЬ	действительные
~ сан	действительное число
РӘВЕШҮЗГӘРТҮ	преобразование
элементар рәвешүзгәртүләр	элементарные преобразования
С	
САЙЛАУ	выбирать
САН	число
тискәре ~	отрицательное число
ике урынлы ~	двухзначное число
унарлы ~	десятичное число
уйланма ~	мнимое число
натураль ~	натуральное число
так ~	нечетное число
гади ~	простое число
рациональ ~	рациональное число
реаль ~	действительное число
бөтен ~	целое число

җөп ~	четное число
САНАП ЧЫГУ	пересчитывать
бинар бәйләнешне элементларын ~	перечисление элементов бинарного отношения
СИНУС	синус
СИСТЕМА	система
векторлар системасы	векторная система
координаталар системасы	система координат
сызыкча бәйсез векторлар системасы	линейная независимость системы векторов
сызыкча бәйле векторлар системасы	линейная зависимость системы векторов
баскычсыман векторлар системасы	ступенчатая система векторов
эквивалент векторлар системасы	эквивалентная система векторов
СУММА	сумма
вектoралырының суммасы	сумма векторов
СУРӘТ	образ
СЫЗЫКЧА	линейный
~ тышчасы	линейная оболочка
СЮРЪЕКЦИЯ	сюръекция
Т	
ТАБЛИЦА	таблица
ТАНГЕНС	тангенс
ТАПКЫРЛАУ	умножение
комплекс саннарны тапкырлау	умножение комплексных чисел
ТАПКЫРЧЫГЫШ	произведение
күплекләрнең туры (декартча) тапкырчыгышы	прямое (декартово) произведение множеств
λ реаль санына тапкырчыгышы	произведение вектора на λ,

	принадлежаще действительному числу
ТАМЫР АЛУ	корень
~ алу	извлечение корня
ТЕОРИЯ	теория
ТИГЕЗЛЕК	равенство
ТИГЕЗЛӘМӘ	уравнение
ТИГЕЗСЕЗЛЕК	неравенство
ТИСКӘРЕ	отрицательный
~ сан	отрицательное число
ТРИГОНОМЕТРИЯ	тригонометрия
ТРИГОНОМЕТРИК	тригонометрическая
комплекс санның ~ рәвеше	тригонометрическая форма записи комплексного числа
ТУРЫ	прямая
координатлар турысы	координатная прямая
ТӘҢГӘЛ	идентично
ТӘРТИПЛӘШТЕРЕЛГӘН ПАР	упорядоченная пара
ТҮБӘ	вершина
графның түбәсе	вершина графа
У	
УКУ ЯРДӘМЛЕГЕ	учебное пособие
математикадан ~	учебное пособие по математике
Ф	
ФАКТОРКҮПЛЕК	фактормножество
ФУНКЦИЯ	функция
тигез ~	прямая функция
берәмлек ~	тождественная функция
кире ~	обратная функция

кайтма функциясе	обратимая функция
Х	
ХАКЛЫК	истинность
~ таблицасы	таблица истинности
Ч	
ЧАГЫЛДЫРУ	отображение
сюръектив ~	сюръективное отображение
инъектив ~	инъективное отображение
ЧИК	граница
интервал чиге	граница интервала
үзгәрешле (үзгәрә торган) интервал чиге	граница интервала измерения переменной
фараз ителү чикләре	границы допустимости
хата чикләре	границы ошибки
өске ~	верхняя граница
аскы ~	нижняя граница
ЧИКСЕЗ	бесконечно, бесконечный
~ үсүче	бесконечно возрастающий
~ кимүче	бесконечно убывающий
ЧИКСЕЗЛЕК	бесконечность
чиксезлеккә кадәр	до бесконечности
чиксезлеккә омтылу	стремиться к бесконечности
ЧИШҮ	решение
ЧЫГАРУ	исключать
тигезләмәдән буынны ~	исключать член из уравнения
Ш	
ШАРТ	условие
җитәрлек ~	достаточное условие

кирәкле ~	необходимое условие
Э	
ЭКВИВАЛЕНЦИЯ	эквивалентность
эквивалент рәвешүзгәртү	эквивалентные преобразования
ЭЙЛЕР-ВЕНН ДИАГРАММАСЫ	диаграмма Эйлер-Венна
Я	
ЯН	боковой
~ яклар	боковые стороны
Ә	
ӘГӘР	если
ӘЙТЕМ	высказывание
беркыйммәтле әйтемнәр	равносильные высказывания
чын ~	истинное высказывание
ялган ~	ложное высказывание
әйтеменең киресе	отрицание
Ө	
ӨЗЛЕКСЕЗЛЕК	непрерывность
ӨЛКӘ	область
билгеләнү өлкәсе	область определения
кыйммәтләр өлкәсе	область значений
ӨСТӘМӘ	дополнение множества
Ү	
ҮЗЛЕК	свойство
төп үзлекләре	основные свойства
характеристик ~	характеристическое свойство
ҮЛЧӘМ	размерность
векторының үлчәме	размерность вектора
ҮРНӘК	прообраз

КУЛЛАНЫЛГАН ӘДӘБИЯТ

1. Варпаховский Ф. Л., Солодовников А. С. Алгебра. — М.: Просвещение, 1981. — 256 с.
2. Галиева Л. И. и др. Математика нигезләре: югары уку йортлар өчен уку ярдәмлеге. — Казань: Мәгариф, 2007. — 148 б.
3. Галиева Л. И. и др. Комплекс саннар: математикадан уку ярдәмлеге. — Казань: Мәгариф, 2000. — 67 б.
4. Галиева Л. И. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Бинарные отношения». — Казань: КГПУ, 1998. — 52 с.
5. Галяутдинов И. Г. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Метод математической индукции». — Казань: КГПУ, 1994. — 48 с.
6. Галяутдинов И. Г. и др. Система индивидуальных заданий по теме «Множества и действия над ними». — Казань: КГПУ, 1998. — 56 с.
7. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979. — 392 с.
8. Куликов Л. Я., Москаленко А. И., Фомин А. А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. — М.: Просвещение, 1993. — 216 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 456 с.
10. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. — М.: Просвещение, 1966. — 324 с.
11. Окунев Л. Я. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Просвещение, 1964. — 272 с.
12. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1972. — 384 с.
13. Сборник задач по алгебре / под ред. А. И. Кострикина. — М.: Наука, 1987. — 240 с.
14. Комплексные числа / под ред. Галяутдинова И. Г. — Казань: КГПУ, 1996. — 24 с.