

Теория вероятностей (конспект)

- **Определение.** Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта.
- **Определение.** Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта (пространство элементарных событий).
- **Определение.** Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта.
- **Определение.** События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.
- **Определение.** Вероятностью события A называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих событию A исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{число, результатов опыта, когда произошло событие } A}{\text{число, проведенных опытов}}; \Rightarrow \underset{\text{невозможное событие}}{0} \leq P(A) \leq \underset{\text{достоверное событие}}{1}$$

- 2.3.6. На соревнования по толканию ядра приехали 7 спортсменов из России, 7 из Швеции и 6 из Сербии. Порядок выступлений определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что седьмым будет выступать спортсмен из Швеции?

• **Решение:** A- «седьмым прыгает швед», $P(A)=7/(7+7+6)=0,35$;

- **Комбинаторика** изучает вопросы о том, сколько различных наборов, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из конечного множества элементов.

- Факториалом числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.
- Обозначение: $n!$ $n!=1*2*3*...n$; $0!=1$; $1!=1$;

- **Перестановками** называются наборы, состоящие из одного и того же количества элементов, отличающихся только порядком следования элементов.

$$P_n = n! - \text{без повторов!} \quad \left. \begin{array}{l} \overline{P}_n = \frac{n!}{k_1! * k_2! * k_3! * \dots * k_m!} \\ k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n; \end{array} \right\} - \text{с повторами!}$$

- **Размещениями** называются упорядоченные наборы из m элементов, выбранных из n элементов, которые отличаются друг от друга, как порядком следования, так и составом элементов.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} - \text{без повторов!} \quad \overline{A}_n^m = n^m - \text{с повторами!}$$

- **Сочетаниями** называются наборы из m элементов, выбранных из n элементов, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} - \text{без повторов!} \quad \overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} - \text{с повторами!}$$

- 2.3.23. Перед началом волейбольного матча судья бросает монету, чтобы определить какая команда будет владеть мячом первой. Команда «Байкал» по очереди играет с командами «Амур», «Енисей», «Виллой», «Иртыш». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах команда «Байкал» будет владеть мячом первой.

$$A - \text{ровно в двух матчах владеет мячом первой (можно перебрать варианты)}$$

$$1 \text{ бросок монеты} - 2 \text{ варианта, бросков четыре} \Rightarrow \underset{\text{всего вариантов}}{2^4 = 16};$$

$$2 \text{ раза первой и 2 раза второй} \Rightarrow \text{переставить } 2211 \Rightarrow \bar{P}_4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6;$$

$$P(A) = \frac{6}{2^4} = 0,375;$$

• **Повторные испытания. Формула Бернулли.**

• Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие A , и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события A** .

• Допустим, что событие A наступает в каждом испытании с вероятностью $P(A)=p$. Определим вероятность $P_{m,n}$ того, что в результате n испытаний событие A наступило ровно m раз.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m};$$

• 2.3.34. Биатлонист стреляет по мишени. Вероятность попадания, в центр мишени, при одном выстреле 0,8. Он стреляет 5 раз. Какова вероятность, что он попал ровно один раз в центр мишени?

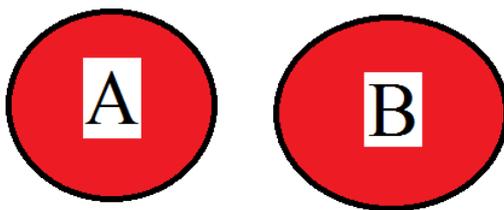
$$P_5(1) = C_5^1 0,8^1 (1-0,8)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,00064;$$

• **Отношение между событиями**

• События называются не совместными, если одновременно не происходят (между ними можно поставить «ИЛИ»). **Рисунок!!!**

• **Теорема (сложения вероятностей).** Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$



• 2.3.37. На экзамене школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных. Вероятность того, что вопрос на тему «Тригонометрия» составляет 0,1. Вероятность, что на тему «Внешние углы» 0,15. Вопросов, относящихся одновременно к обоим этим темам, нет. Найдите вероятность, что на экзамене достанется вопрос по одной из этих двух тем.

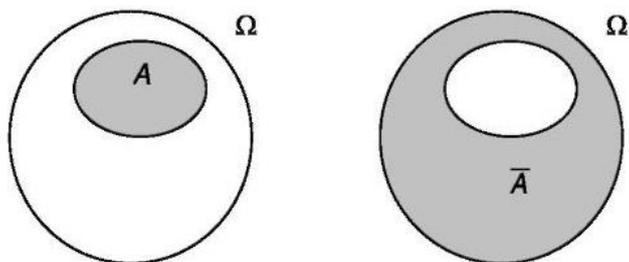
Решение: А-«Тригонометрия», В- «Внешние углы». Вопросов, относящихся одновременно к обоим этим темам, нет, поэтому «ИЛИ». С-«на экзамене достанется вопрос по одной из этих двух тем», следовательно, $P(C)=P(A)+P(B)=0,1+0,15=0,25$;

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

• Пример: «Натуральное число делиться на 5» и «Натуральное число не делиться на 5»

• **Следствие 2:** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

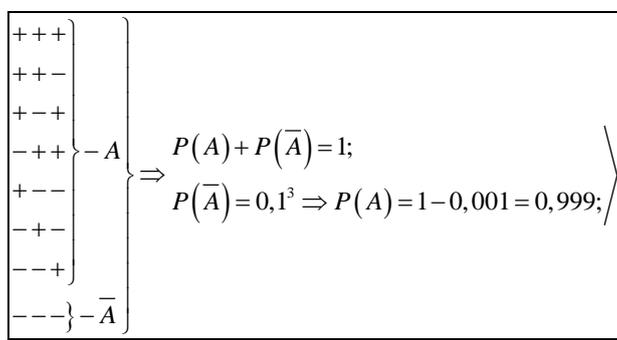
$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



• Если в тексте задачи присутствует «хотя бы один...», тогда, как правило нужно найти противоположное событие.

• 2.3.45. Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течении года 0,1. Какова вероятность, что в течении года хотя бы одна лампа не перегорит?

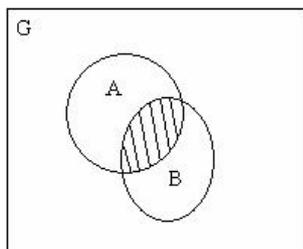
Решение:



+-«лампочка горит», «-» - лампочка не горит.

• Два события совместны, если появление одного не исключает другое. Рисунок!!!

• Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.



$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

• 2.3.47. В аэропорту два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате кофе закончится равно 0,35. Вероятность того, что кофе закончиться в обоих автоматах 0,16. Какова вероятность, что кофе останется в обоих автоматах?

Решение: 0,35+0,35-0,16=0,54 – вероятность, того, что «кофе закончится хотя бы в одном автомате», тогда 1-0,54=0,46- «кофе останется в обоих автоматах».

• Функция распределения

2.3.42 Вероятность того, что на тесте по физике учащийся решит больше 9 задач равна 0,61. вероятность того, что больше 8 задач равна 0,73. Какова вероятность, что учащийся решит ровно 9 задач?

Решение: Разница между событиями – 9 задач, поэтому 0,73-0,61=0,12;

• **Определение.** Событие А называется **независимым** от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. (между ними можно поставить «И»)

• Событие А называется **зависимым** от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

• **Теорема. (Умножения вероятностей)** Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(A \text{ и } B) = P(A)P(B / A) = P(A)P_A(B); \Rightarrow P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B); \text{—не зависимые события};$$

• **Формула полной вероятности**

• Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий H_1, H_2, \dots, H_n , образующих **полную группу** событий. Пусть известны вероятности этих событий

$$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n) \Rightarrow P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1;$$

• и условные вероятности наступления события А при наступлении события $P(A / H_1), P(A / H_2), \dots, P(A / H_n)$

• Тогда вероятность события А, можно найти по формуле

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + \dots + P(H_n)P(A / H_n) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A / H_i)$$

• 2.3.44. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая выпускает 45% всех стекол, вторая 55%. Первая фабрика выпускает 5% бракованных фар, вторая 3%. Какова вероятность, что случайно купленное стекло бракованное?

Решение:

$$\begin{aligned} H_1 - \text{стекло сделано на первой фабрике}; H_2 - \text{стекло сделано на второй фабрике}; \Rightarrow P(H_1) = 0,45; P(H_2) = 0,55; \\ A - \text{куплено бракованное стекло}; \Rightarrow P(A / H_1) = 0,05; P(A / H_2) = 0,03; \\ P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) = 0,45 * 0,05 + 0,55 * 0,03 = 0,039; \end{aligned}$$

• 2.3.49. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что по ошибке исправную, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет заблокирована системой контроля?

• **Решение:**

$$\begin{aligned} H_1 - \text{батарейка исправна}; H_2 - \text{батарейка не исправна}; \Rightarrow P(H_1) = 0,95; P(H_2) = 0,05; \\ A - \text{батарейка заблокирована системой контроля}; \Rightarrow P(A / H_1) = 0,01; P(A / H_2) = 0,96; \\ P(A) = P(A / H_1) * P(H_1) + P(A / H_2) * P(H_2) = 0,01 * 0,95 + 0,96 * 0,05 = 0,0575; \end{aligned}$$